УДК 531.8

АКСИОМЫ МЕХАНИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

–––––––

AXIOMS OF MECHANICS AND THEIR APPLICATION FOR RESEARCH OF MECHANICAL SYSTEMSS

Смелягин Анатолий Игоревич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики,
Кубанский государственный
технологический университет
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoly Igorevich
Doctor of engineering, Professor,
Head of the department
of theoretical mechanics,
Kuban state technological university
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Собраны вместе и сформулированы основные аксиомы природы. Доказано, что материальные объекты Вселенной обладают дуальностью и поэтому работа взаимодействий материальных объектов в любое мгновение равна нулю. Отмечено, что общее уравнение динамики ранее выводилась для механических систем без учета их фактической подвижности. Поэтому оно фактически применялось для исследования движения тел и механических систем только с одной степенью свободы. С целью расширения областей применения получено общее уравнение динамики для материальных тел и механических систем с любым числом степеей свободы. С помощью полученных уравнений исследован свободный полет трехподвижного вращающегося колеса.

Ключевые слова: теорема, кинетическая энергия, степень свободы, тело, механическая система, работа, сила, момент, скорость, закон движения.

Annotation. Collected together and formulated the basic axioms of nature. It is proved that the material objects of the Universe have duality and therefore the work of the interactions of material objects at any instant is zero. It is noted that the general equation of dynamics was previously derived for mechanical systems without taking into account their actual mobility. Therefore, it was actually used to study the motion of bodies and mechanical systems with only one degree of freedom. With the purpose of expanding the fields of application, a general equation of dynamics for material bodies and mechanical systems with any number of degrees of freedom has been obtained. With the help of the equations obtained, the free flight of a three-moving rotating wheel is investigated.

Keywords: dynamics, the general equation of dynamics, the law of motion, the degree of freedom, the material body, the mechanical system, the work, the force, the moment.

Введение

Механика, как наука, базируется на законах, аксиомах и принципах. Фундамент современной классической механики построен на идеях и трудах Галилея, Ньютона и Эйлера. В [1–5] отмечается: «По мере углубления наших знаний выявляются границы применимости теоретической механики, относительность ее понятий. Выяснилось, что аксиомы или законы классической механики Ньютона не абсолютны». Тем не менее, современная классическая механика, базируется на законах и аксиомах сформулированных ещё в XV–XVII веках. И это несмотря на то, что со времен Галилея, Ньютона и Эйлера она быстро развивалась и совершенствовалась. При этом в классической механике изменились многие понятия, определения, формулировки и формулы.

Однако любая развивающаяся наука не может в своей основе иметь законы и аксиомы, представляющие собой «вечные» истины. Основываясь на современных понятиях и знаниях [5–12], сгруппируем и сформулируем основные аксиомы природы и применим их для анализа механических систем.

Аксиомы

- Вселенная это все то, что существует – весь мир.
- Вселенная одна.
- Вселенная консервативна.
- Вселенная дуальна.
- Все объекты Вселенной одновременно покоятся и движутся.
- Вселенная разнообразна по составу.

- Материя (вещество, тело, поле) – один из объектов Вселенной.
- Материя – хранилище вещества и энергии.
- Масса и энергия Вселенной постоянны.
- Энергии объектов Вселенной определяются их видом, составом, массой и состоянием (движением).
- Все объекты Вселенной взаимодействуют (контактно или бесконтактно) между собой.
- Взаимодействие объектов приводит к изменению их энергии, состояния (движению) и совершению работы.
- Изменение энергии объектов равно работе ($dT = dA$).
- Работа взаимодействий материальных объектов в любое мгновение равна нулю ($\sum A_i = 0$).

Приведенные аксиомы относятся к любому состоянию и движению материи.

Так как механическая форма движения материи является в настоящее время наиболее исследованной, поэтому, пока, остановимся только на ней.

Так как из основных аксиом следует, что Вселенная одномоментно находится как в движении, так и в покое, то материальные тела также одномоментно находятся в движении и равновесии. Кажется, в этом заключении кроется противоречие, но это не так. Это в полной мере соответствует законам диалектики и ими же объясняется. Вспомним эти законы [13].

Закон единства и борьбы противоположностей

Развитие и старение (движение) в природе происходит в результате раздвоения единого на взаимопроникающие противоположности, например, движение – покой.

Закон перехода количественных изменений в качественные

Развитие – старение (движение) в природе осуществляется путём накопления количественных изменений в объекте, что неизбежно приводит к нарушению его стабильного состояния и скачкообразному превращению в качественно новый вид (покой).

Закон отрицания

Развитие в природе идёт через постоянное отрицание противоположностей, их взаимопревращение, вследствие чего движении превращается в покой и наоборот.

Считается, что основным из этих законов диалектики является закон единства и борьбы противоположностей, но, скорее всего, это не так.

Отметим, что борьба во Вселенной может быть только в среде обитателей живой природы, а для неживой природы это понятие бессмысленно. Более того, анализ первого и третьего законов диалектики для более распространенных во Вселенной неживых объектов показывает, что это один единый закон, который можно сформулировать следующим образом – *Закон единства и отрицания противоположностей*.

Тогда классический второй закон диалектики описывает условия, процессы и явления, которые реализуют основной закон.

Итак, для неживой природы законы диалектики должны быть следующими:

– Закон единства и отрицания противоположностей;
– Закон перехода количественных изменений в качественные.

Именно законами диалектики и объясняется то, что все материальные тела во Вселенной одномоментно находятся как в движении, так и в покое. Этим же можно объяснить и эффективное действие ранее сформулированных «законов», принципов и теорем механики [14–17], которые считались независимыми, но на самом деле являются следствиями законов диалектики.

Следствия

К следствиям из законов диалектики, которые широко используются в механике, прежде всего, можно отнести:

- законы или аксиомы Ньютона;
- принцип Даламбера;
- общее уравнение динамики;
- общее уравнение статики;
- принцип освобождаемости от связей.

Покажем это.

Современные трактовки законов Ньютона хотя и многообразны, но по смыслу и содержанию совершенно идентичны [1, 3–5].

Закон I

Тело (материальная точка) находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если оно не подвержено внешним воздействиям со стороны других тел.

Закон II

Произведение массы точки на вектор абсолютного ускорения, которое она получает под действием всех приложенных к точке сил, равно геометрической сумме этих сил, то есть

$$m\overline{a} = \sum \overline{F} \ .$$

Закон III

Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению:

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21} \, .$$

Анализ этих «законов» Ньютона показывает, что все рассматриваемые в этих законах объекты одновременно находятся в движении и покое (равновесии).

Так, в соответствии с первым «законом» если на объект действует уравновешенная система сил, то тело действительно в это мгновение находится в покое. При этом «закон» не исключает и движение объекта с постоянной скоростью (V = const).

В соответствии со вторым «законом», если на тело действуют внешние силы ($\sum \overline{F} \neq 0$), то тело (объект) сопротивляется этому действию силой равной $m\overline{a}$, которая и является в данном случае уравновешивающей. Следовательно, тело (объект) в рассматриваемое мгновение движется и одновременно находится в покое, так как на него действует система уравновешенных сил.

Третий «закон» утверждает, что в каком бы состоянии, движении или покое ни находился материальный объект, его взаимодействия с другими объектами будут только взаимно уравновешенными.

Проведенный анализ показывает, что перечисленные «законы» Ньютона подтверждают дуальность состояния материальных тел.

Теперь исследуем принцип Даламбера, который прямо утверждает, что если к движущемуся телу приложить действующие на него активные силы, реакции связей и силу инерции, то тело будет находиться в равновесии, то есть

$$\overline{F} + \overline{\Phi} = 0 \, ,$$

где $\overline{F}$ *и* $\overline{\Phi}$ – главные вектора внешних (активных) сил и сил инерции, соответственно.

Принцип Даламбера позволяет решать задачи динамики более простыми методами статики, поэтому его еще называют методом кинетостатики.

Видно, что в самой формулировке принципа Даламбера предусмотрена дуальность (движение и покой) одномоментного состояния тела.

Рассмотрим общее уравнение динамики, которое, как известно, логически объединяет принципы Даламбера и возможных перемещений.

В механической системе с идеальными связями сумма работ, совершаемых активными силами и силами инерции на любом возможном (виртуальном) перемещении равна нулю, то есть

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_{\Phi i} = 0 \, , \tag{1}$$

где A_i и $A_{\Phi i}$ – работы на возможном (виртуальном), а правильнее говорить предшествующем исследуемому, перемещении, совершаемые активными i-ми силами, моментами сил и силами, моментами сил инерции, соответственно.

Если принять, что исследуемый объект находится в покое, то (1) примет вид:

$$\sum \delta A_i = 0 .$$

Последнее уравнение называют общим уравнением статики.

Так как общее уравнение динамики, следствием из которого является общее уравнение статики, выводится непосредственно из принципа Даламбера с применением принципа возможных перемещений, то естественно, что в этих уравнениях так же предусмотрена дуальность одномоментного состояния тела.

Известно, что механика базируется на аксиомах. Одной из таких основополагающих аксиом является аксиома связей.

Связью [2–6] для материального тела или материальной точки называют материальные объекты (тела и точки) которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого тела или материальной точки.

Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей) утверждает [2–6], что всякую связь можно отбросить и заменить силой, реакцией связей (в простейшем случае) или системой сил (в общем случае).

Применяя непосредственно к взаимодействующим телам (рис.1) аксиому связей, получим как оригинальную, так и современные формулировки третьего закона (аксиомы) И. Ньютона.

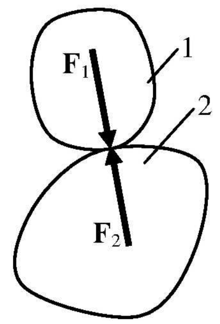

Рисунок 1 – Взаимодействие двух тел:
1, 2 – первое и второе тело, соответственно;
F1, F2 – равные по величине и противоположно направленные силы

Отсюда следует, что третий «закон» Ньютона есть следствие из аксиомы связей. Следовательно, как и в законах Ньютона, так и в принципе освобождаемости от связей присутствует одномоментность движения и покоя материального тела.

Итак, в соответствии с «законами» Ньютона, основными принципами, уравнениями и теоремами механики, любой материальный объект Вселенной находится одновременно в движении и равновесии, так как все его взаимодействия (действующие на него силовые факторы) всегда уравновешенны.

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [2–6] показал, что они описывают движение только абстрактных материальных объектов - материальных точек. Следовательно, законы Ньютона корректно можно использовать только для исследования не существующих в природе объектов, а именно материальных точек.

В работах [5–12, 14–18] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия, а также выведены теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы, а также показана эффективность их применения для исследования материальных тел и механических систем.

В [2, 7, 8] показано, что общее уравнение динамики, которое логически объединяет принципы Даламбера и возможных перемещений, может эффективно применяться для исследования движения материальных объектов.

Как следует из [2, 7, 8] общее уравнение динамики было получено для материальной точки и для системы материальных точек без учета их фактической подвижности. Поэтому общее уравнение динамики (1) фактически пригодно только для описания движения тел и механических систем с одной степенью свободы.

Рассмотрим возможность применения общее уравнение динамики для тел и механических систем с несколькими степенями свободы.

Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики для материальных тел и механических систем (1) удобнее представить в следующем виде

$$\sum \delta A_{Fi} + \sum \delta A_{Mi} + \sum \delta A_{\Phi Fi} + \sum \delta A_{\Phi Mi} = 0\,, \tag{2}$$

где $\sum A_{Fi}$ и $\sum \delta A_{Mi}$ – работы на виртуальном перемещении, совершаемые активными i-ми силами и моментами сил, соответственно; $\sum \delta A_{\Phi Fi}$ и $\sum \delta A_{\Phi Mi}$ – работы на виртуальном перемещении, совершаемые *i*-ми силами инерции и моментами сил инерции, соответственно.

Найдем работу активных сил и моментов сил, действующих на тело, при его перемещении.

Работа сил и моментов сил на виртуальных перемещениях определится:

$$\delta A_F = \int \overline{F}\left(\overline{S}\right) \cdot d\delta \overline{S}\ ; \tag{3}$$

$$\delta A_M = \int \overline{M}\left(\overline{\varphi}\right) \cdot d\delta \overline{\varphi}\,, \tag{4}$$

где δS, $\delta\varphi$ – соответственно, виртуальные перемещения и углы поворота исследуемого тела.

Представим силы, моменты сил, виртуальные перемещения и углы поворота, соответственно, через их проекции на координатные оси и единичные орты:

$$\overline{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}\ ; \tag{5}$$

$$\overline{M} = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}\ ; \tag{6}$$

$$\bar{\delta}\overline{S} = d\delta x \cdot \bar{i} + d\delta y \cdot \bar{j} + d\delta z \cdot \bar{k}\ ; \tag{7}$$

$$\bar{\delta}\overline{\varphi} = d\delta\varphi_x \cdot \bar{i} + d\delta\varphi_y \cdot \bar{j} + d\delta\varphi_z \cdot \bar{k}\ . \tag{8}$$

Подставим (5-8) в (3,4), в результате получим:

$$\delta A_F = \int \left(F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(d\delta x \cdot \bar{i} + d\delta y \cdot \bar{j} + d\delta z \cdot \bar{k}\right); \tag{9}$$

$$\delta A_M = \int \left(M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(\bar{\delta}\overline{\varphi} = d\delta\varphi_x \cdot \bar{i} + d\delta\varphi_y \cdot \bar{j} + d\delta\varphi_z \cdot \bar{k}\right). \tag{10}$$

Из (9–10) следует, что их подинтегральные выражения представляют собой скалярные произведения векторов. Следовательно:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1\,; \tag{11}$$

$$\bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \tag{12}$$

$$k \cdot k = 1; \tag{13}$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0\,; \tag{14}$$

$$\bar{i} \cdot \bar{k} = 0\,; \tag{15}$$

$$\bar{k} \cdot \bar{j} = 0\,. \tag{16}$$

С учетом (11–16), после ряда преобразований (9–10), получим:

$$\delta A_F = \int F_x d\delta x + \int F_y d\delta y + \int F_z d\delta z\ ; \tag{17}$$

$$\delta A_M = \int M_x d\delta\varphi_x + \int M_y d\delta\varphi_y + \int M_z d\delta\varphi_z\,. \tag{18}$$

Обозначим:

$$\delta A_{\Pi x} = \int F_x d\delta x\,; \tag{19}$$

$$\delta A_{\Pi y} = \int F_y d\delta y\,; \tag{20}$$

$$\delta A_{\Pi z} = \int F_z d\delta z\,; \tag{21}$$

$$\delta A_{Bx} = \int M_x d\delta\varphi_x\,; \tag{22}$$

$$\delta A_{By} = \int M_y d\delta\varphi_y\,; \tag{23}$$

$$\delta A_{Bz} = \int M_z d\delta\varphi_z\,, \tag{24}$$

где $\delta A_{\Pi x}$, $\delta A_{\Pi y}$, $\delta A_{\Pi z}$, δA_{Bx}, δA_{By}, δA_{Bz} – соответственно, работы сил и моментов сил при виртуальном поступательном и вращательном движении тела вдоль и вокруг соответствующих осей.

С учетом принятых обозначений (19–24), формулы (17, 18) примут вид

$$\delta A_F = \delta A_{\Pi x} + \delta A_{\Pi y} + \delta A_{\Pi z}\,; \tag{25}$$

$$\delta A_M = \delta A_{Bx} + \delta A_{By} + \delta A_{Bz}\,. \tag{26}$$

Просуммировав работы всех сил и моментов сил, найдём:

$$\sum \delta A_{Fi} = \sum \delta A_{\Pi xi} + \sum \delta A_{\Pi yi} + \sum \delta A_{\Pi zi}\,; \tag{27}$$

$$\sum \delta A_{Mi} = \sum \delta A_{Bxi} + \sum \delta A_{Byi} + \sum \delta A_{Bzi}\,. \tag{28}$$

Теперь найдем работу сил инерции и моментов сил инерции, действующих на тело, при его перемещении.

Работа сил инерции и моментов сил инерции на виртуальных перемещениях определится:

$$\delta A_{\Phi F} = \int \overline{\Phi}\left(\overline{S}\right) \cdot d\delta\overline{S}\,; \tag{29}$$

$$\delta A_{\Phi M} = \int \overline{M_{\Phi}}\left(\overline{\varphi}\right) \cdot d\overline{\delta\varphi}\,, \tag{30}$$

где δS, $\delta\varphi$ – соответственно, виртуальные перемещения и углы поворота исследуемого тела.

Представим силы, моменты сил, виртуальные перемещения и углы поворота, соответственно, через их проекции на координатные оси и единичные орты:

$$\overline{\Phi} = \Phi_x \cdot \bar{i} + \Phi_y \cdot \bar{j} + \Phi_z \cdot \bar{k}\,; \tag{31}$$

$$\overline{M_{\Phi}} = M_{\Phi x} \cdot \bar{i} + M_{\Phi y} \cdot \bar{j} + M_{\Phi z} \cdot \bar{k}\,; \tag{32}$$

$$\bar{\delta}\overline{S} = d\delta x \cdot \bar{i} + d\delta y \cdot \bar{j} + d\delta z \cdot \bar{k}\,; \tag{33}$$

$$\bar{\delta}\overline{\varphi} = d\delta\varphi_x \cdot \bar{i} + d\delta\varphi_y \cdot \bar{j} + d\delta\varphi_z \cdot \bar{k}\,. \tag{34}$$

Подставим (5–8) в (3, 4), в результате получим:

$$\delta A_{\Phi F} = \int\left(\Phi_x \cdot \bar{i} + \Phi_y \cdot \bar{j} + \Phi_z \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(d\delta x \cdot \bar{i} + d\delta y \cdot \bar{j} + d\delta z \cdot \bar{k}\right); \tag{35}$$

$$\delta A_{\Phi M} = \int\left(M_{\Phi x} \cdot \bar{i} + M_{\Phi y} \cdot \bar{j} + M_{\Phi z} \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(d\delta\varphi_x \cdot \bar{i} + d\delta\varphi_y \cdot \bar{j} + d\delta\varphi_z \cdot \bar{k}\right). \tag{36}$$

Из (35–36) следует, что их подинтегральные выражения представляют собой скалярные произведения векторов. Следовательно:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1; \quad (37)$$

$$\bar{j} \cdot \bar{j} = 1; \quad (38)$$

$$k \cdot k = 1; \quad (39)$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0; \quad (40)$$

$$\bar{i} \cdot \bar{k} = 0; \quad (41)$$

$$\bar{k} \cdot \bar{j} = 0. \quad (42)$$

С учетом (37–42), после ряда преобразований (35–36), получим:

$$\delta A_{ΦF} = \int Φ_x d\delta x + \int Φ_y d\delta y + \int Φ_z d\delta z; \quad (43)$$

$$\delta A_{ΦM} = \int M_{Φx} d\delta\varphi_x + \int M_{Φy} d\delta\varphi_y + \int M_{Φz} d\delta\varphi_z. \quad (44)$$

Обозначим:

$$\delta A_{ΦПx} = \int Φ_x d\delta x; \quad (45)$$

$$\delta A_{ΦПy} = \int Φ_y d\delta y; \quad (46)$$

$$\delta A_{ΦПz} = \int Φ_z d\delta z; \quad (47)$$

$$\delta A_{ΦBx} = \int M_{Φx} d\delta\varphi_x; \quad (48)$$

$$\delta A_{ΦBy} = \int M_{Φy} d\delta\varphi_y; \quad (49)$$

$$\delta A_{ΦBz} = \int M_{Φz} d\delta\varphi_z, \quad (50)$$

где $\delta A_{ΦПx}$, $\delta A_{ΦПy}$, $\delta A_{ΦПz}$, $\delta A_{ΦBx}$, $\delta A_{ΦBy}$, $\delta A_{ΦBz}$ – соответственно, работы сил и моментов сил при виртуальном поступательном и вращательном движении тела вдоль и вокруг соответствующих осей.

С учетом принятых обозначений (45–50), формулы (29, 30) примут вид:

$$\delta A_{ΦF} = \delta A_{ΦПx} + \delta A_{ΦПy} + \delta A_{ΦПz}; \quad (51)$$

$$\delta A_{ΦM} = \delta A_{ΦBx} + \delta A_{ΦBy} + \delta A_{ΦBz}. \quad (52)$$

Просуммировав работы всех сил инерции и моментов сил инерции, найдём:

$$\sum \delta A_{ΦFi} = \sum \delta A_{ΦПxi} + \sum \delta A_{ΦПyi} + \sum \delta A_{ΦПzi}; \quad (53)$$

$$\sum \delta A_{ΦMi} = \sum \delta A_{ΦBxi} + \sum \delta A_{ΦByi} + \sum \delta A_{ΦBzi}. \quad (54)$$

Подставим (27, 20) и (53, 54) в (2), в результате получим:

$$\sum \delta A_{Пxi} + \sum \delta A_{Пyi} + \sum \delta A_{Пzi} + \sum \delta A_{Bxi} + \sum \delta A_{Byi} + \sum \delta A_{Bzi} +$$
$$+ \sum \delta A_{ΦПxi} + \sum \delta A_{ΦПyi} + \sum \delta A_{ΦПzi} + \sum \delta A_{ΦBxi} + \sum \delta A_{ΦByi} + \sum \delta A_{ΦBzi} = 0. \quad (55)$$

Уравнение (55) – это общее уравнение динамики для механических систем с одной степенью свободы.

Если механическая система имеет *j* степеней свободы, то общее уравнение для такой системы будет иметь вид:

$$\sum \delta A_{Пxij} + \sum \delta A_{Пyij} + \sum \delta A_{Пzij} + \sum \delta A_{Bxij} + \sum \delta A_{Byij} + \sum \delta A_{Bzij} +$$
$$+ \sum \delta A_{ΦПxij} + \sum \delta A_{ΦПyij} + \sum \delta A_{ΦПzij} + \sum \delta A_{ΦBxij} + \sum \delta A_{ΦByij} + \sum \delta A_{ΦBzij} = 0. \quad (56)$$

Из (56) следует, что если механическая система имеет несколько степеней свободы, то сумма всех работ на виртуальном перемещении равна нулю.

Часто на практике приходится исследовать тела и системы тел, которые совершают движение в плоскости. Для исследования таких объектов системы уравнений (55) и (56) упростятся и примут вид:

$$\sum\delta A_{\Pi xi} + \sum\delta A_{\Pi yi} + \sum\delta A_{Bzi} + \sum\delta A_{\Phi\Pi xi} + \sum\delta A_{\Phi\Pi yi} + \sum\delta A_{\Phi Bzi} = 0\,; \qquad (57)$$

$$\sum\delta A_{\Pi xij} + \sum\delta A_{\Pi yij} + \sum\delta A_{Bzij} + \sum\delta A_{\Phi\Pi xij} + \sum\delta A_{\Phi\Pi yij} + \sum\delta A_{\Phi Bzij} = 0\,. \qquad (58)$$

Для статически определимых механических систем, которые находятся в равновесии уравнение (56) примет вид:

$$\sum\delta A_{\Pi xij} + \sum\delta A_{\Pi yij} + \sum\delta A_{\Pi zij} + \sum\delta A_{Bxij} + \sum\delta A_{Byij} + \sum\delta A_{Bzij} = 0\,, \qquad (59)$$

где j – число неизвестных реакций.

Уравнение (59) – это общее уравнение статики для статически определимых механических систем.

Применяя искусственный приём перевода неизвестных реакций в задаваемые силы, с помощью уравнений (59) можно просто и эффективно находить любую реакцию.

Рассмотрим практическое применение выведенной теоремы при исследовании, например, движения вращающегося колеса.

Свободный полет в плоскости колеса

Исследуем, например, свободный полет вращающегося колеса (рис. 2) в вертикальной плоскости.

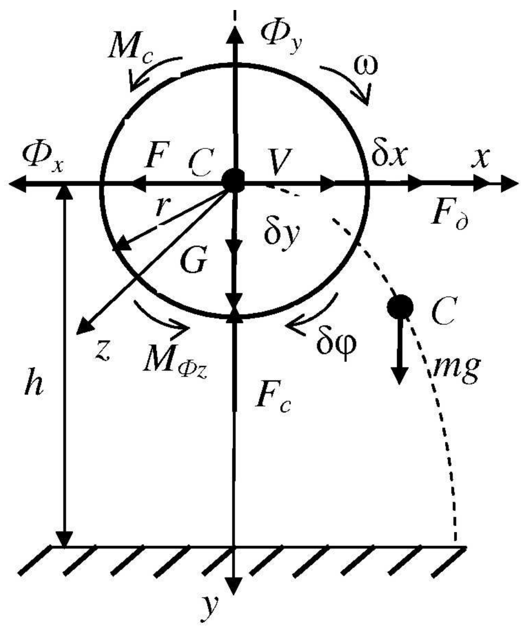

Рисунок 2 – Расчетная схема

При исследовании движения колеса примем, что колесо представляет собой кольцо. Считаем, что колесо имеет радиус r и массу m, которая сосредоточена в точке C пересечения осей симметрии колеса. Для широты исследования примем, что на колесо действуют:

- момент сопротивления $M_c = b\omega^2$;
- силы $F = \text{const}$, $F_Д = \text{const}$, $F_Д > F$, $G = mg$ и $F_c = kV_y$.

Движение колеса исследуем при следующих начальных условиях, что начальный момент времени $t = 0$ начальные:

- линейные V и угловая ω скорости, соответственно, равны $V_{0x} = 0$, $V_{0y} = 0$, $\omega = \omega_0$;
- линейные x, y и угловое φ перемещения равны, соответственно, $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$.

Из расчетной схемы следует, что исследуемое колесо совершает два поступательных движения вдоль осей x, y и одно вращательное вокруг оси z, следовательно, оно совершает свободное плоскопараллельное движение и имеет три степени свободы.

При исследовании поступательных движений колеса уравнения будем записывать для точки C (центра тяжести колеса).

Для определения движения колеса воспользуемся системой уравнений (58), которые для исследуемого случая примут вид:

$$\sum \delta A_{\Pi xi} + \sum \delta A_{\Phi \Pi xi} = 0; \tag{59}$$

$$\sum \delta A_{\Pi yi} + \sum \delta A_{\Phi \Pi yi} = 0; \tag{60}$$

$$\sum \delta A_{Bzi} + \sum \delta A_{\Phi Bzi} = 0. \tag{61}$$

Найдем виртуальные работы (рис.2), входящие в уравнения (59–61):

$$\sum \delta A_{\Pi xi} = F_{Д} \cdot \delta x - F \cdot \delta x; \tag{62}$$

$$\sum \delta A_{\Phi \Pi xi} = -m\ddot{x} \cdot \delta x; \tag{63}$$

$$\sum \delta A_{\Pi yi} = mg \cdot \delta y - kV_y \cdot \delta y; \tag{64}$$

$$\sum \delta A_{\Phi \Pi yi} = -m\ddot{y} \cdot \delta x; \tag{65}$$

$$\sum \delta A_{Bzi} = -b\omega^2 \cdot \delta\varphi; \tag{66}$$

$$\sum \delta A_{\Phi Bzi} = I_z \ddot{\varphi} \delta\varphi; \tag{67}$$

Подставим (62–67) в уравнения (59–61) и после преобразований, получим:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\left(F_{Д} - F\right); \tag{68}$$

$$\ddot{y} = g - \frac{k}{m}V_y; \tag{69}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{b\omega^2}{mr^2}. \tag{70}$$

Разделим переменные в уравнениях (68–70):

$$dV_x = \frac{1}{m}\left(F_{Д} - F\right)dt; \tag{71}$$

$$\frac{dV_y}{g - \frac{k}{m}V_y} = dt; \tag{72}$$

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{dbt}{mr^2}. \tag{73}$$

Проинтегрируем (71–73):

$$V_x = \frac{1}{m}\left(F_{Д} - F\right)t + C_1; \tag{74}$$

$$-\frac{m}{k}\ln\left(g - \frac{k}{m}V_y\right) = t + C_2; \tag{75}$$

$$-\frac{1}{\omega} = -\frac{b}{mr^2}t - C_3, \tag{76}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

После подстановки начальных условий в (74–76), найдем:

$$C_1 = 0; \tag{77}$$

$$C_2 = -\frac{m}{k}\ln g; \tag{78}$$

$$C_3 = \frac{1}{\omega_0}. \tag{79}$$

Подставив (77–79) в (74–76) и после ряда преобразований, найдем скорости колеса в поступательных и вращательном движениях колеса:

$$V_x = \frac{1}{m}\left(F_Д - F\right)t; \tag{80}$$

$$V_y = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right); \tag{81}$$

$$\omega = \frac{1}{\frac{b}{mr^2}t + \frac{1}{\omega_0}}. \tag{82}$$

Так как колесо совершает сложное движение, то зная скорости движения центра тяжести колеса V_x, V_y и угловую скорость ω можно по теореме сложения скоростей найти скорости любых точек колеса:

- центра тяжести «*C*» – $V_c^2 = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$;
- любой точки колеса – $V_i = \sqrt{V_C^2 + V_{Ti}^2}$.

где $V_{Ti} = \omega r_{Ti}$ – скорость *i*-той точки колеса; r_{Ti} – радиус *i*-той точки колеса.

Разделив переменные в (80–82) и проинтегрировав полученные выражения, получим:

$$x = \frac{1}{2m}\left(F_Д - F\right)t^2 + C_4; \tag{83}$$

$$y = \frac{gm}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C_5; \tag{84}$$

$$\varphi = \frac{mr^2}{b}\ln\left|\frac{1}{\omega_0} + \frac{b}{mr^2}t\right| + C_6, \tag{85}$$

где C_4, C_5, C_6 – постоянные интегрирования.

После подстановки начальных условий в (83–85), найдем:

$$C_4 = 0; \tag{86}$$

$$C_5 = -g\left(\frac{m}{k}\right)^2; \tag{87}$$

$$C_6 = \frac{mr^2}{b}\ln\left|\frac{1}{\omega_0}\right|. \tag{88}$$

Подставив (86–88) в (83–85) и после ряда преобразований, найдем законы движения колеса вдоль осей *x*, *y* и вокруг *z*:

$$x = \frac{1}{2m}\left(F_Д - F\right)t^2;$$

$$y = \frac{gm}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) - g\left(\frac{m}{k}\right)^2;$$

$$\varphi = \frac{mr^2}{b}\ln\left|\frac{1}{\omega_0} + \frac{b}{mr^2}t\right| - \frac{mr^2}{b}\ln\left|\frac{1}{\omega_0}\right|.$$

Зная координаты точки *C* и закон вращения колеса можно найти законы движения всех точек колеса.

Формулы (81) и (82) для определения вращения и угловой скорости колеса вокруг оси *z* полностью совпадают с формулами, которые можно найти из дифференциальных уравнений вращательного движения тел. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Выводы

- Собраны, уточнены и сформулированы основные аксиомы природы.
- Показано, что общее уравнение динамики может применяться как для тел, так и для механических систем с любым числом степеней свободы.
- Общее уравнение динамики является универсальным и поэтому может применяться для исследования всех видов механического движения.

Литература:

1. Харламов П.В. Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. – Киев : Наук, думка, 1995. – 407 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
3. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2014. – №1. – С. 21–25.
4. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2014. – № 2. – С. 11–16.
5. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2014. – № 2. – С. 17–26.
6. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2014. – № 3. – С. 19–34.
7. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2014. – № 4. – С. 21–29.
8. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2015. – № 1. – С. 19–27.
9. Смелягин А.И. О необоснованности применения законов Ньютона для исследования динамики машин или современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них : в сб.: проблемы механики современных машин / материалы VI международной конференции; ответственный редактор В.С. Балбаров. – 2015. – С. 344–350.
10. Смелягин А.И. Современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них : в сб.: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики / Сборник докладов; составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – 2015. – С. 3500–3502.
11. Смелягин А.И. Современные аксиомы и следствия из них для исследования динамики машин : в сб.: Инновации в машиностроении (ИНМАШ-2015) / сборник трудов VII Международной научно-практической конференции. Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Новосибирский государственный технический университет, Бийский технологический институт, МИП Техмаш; под редакцией В.Ю. Блюменштейна, А.А. Баканова, О.А. Останина. – 2015. – С. 526–529.
12. Смелягин А.И. Современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них : в сб.: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики / Сборник докладов; составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – 2015. – С. 3500–3502.

13.Философия : учебник / под ред. Г.В. Андрейченко, В.Д. Грачева. – Ставрополь : Изд-во СГУ, 2001. – С. 245.

14.Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движений механических систем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2015. – № 2. – С. 19–26.

15.Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования механических систем вращательного движения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2015. – № 3. – С. 19–27.

16.Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движения колесницы // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2015. – № 10. – С. 47–62.

17.Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей и ускорений для исследования механических систем с помощью новых аксиом и теорем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2016. – № 2. – С. 21–29.

18.Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей для исследования механических систем вращательного движения // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2016. – № 10. – С. 125–139.

References:

1. Kharlamov P.V. Sketches about the mechanics bases. Myths, delusions and errors. – Kiev : Sciences, thought, 1995. – 407 p.

2. Nikitin N.N. Course of theoretical mechanics. – M. : Higher school, 1990. – 607 p.

3. Smelyagin A.I. Objects for which axioms or laws of classical mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2014. – No. 1. – P. 21–25.

4. Smelyagin A.I. Axioms or laws of movement were formulated by I. Newton // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2014. – No. 2. – P. 11–16.

5. Smelyagin A.I. Basic, primary concepts of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2014. – No. 2. – P. 17–26.

6. Smelyagin A.I. Axioms of movement of the material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2014. – No. 3. – P. 19–34.

7. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2014. – No. 4. – P. 21–29.

8. Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations from them for a research of movements of the material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2015. – No. 1. – P. 19–27.

9. Smelyagin A.I. About groundlessness of application of laws of Newton for a research of dynamics of machines or the modern axioms of movement of the material bodies and the investigation from them : in col.: problems of mechanics of the modern machines / materials VI of the international conference; editor-in-chief V.S. Balbarov. – 2015. – P. 344–350.

10.Smelyagin A.I. The modern axioms of movement of the material bodies and the investigation from them: in col.: The XI All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and application-oriented mechanics / Collection of reports; originators: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Haydarov; editor-in-chief: D.A. Gubaidulin, A.I. Yelizarov, E.K. Lipachev. – 2015. – P. 3500–3502.

11.Smelyagin A.I. The modern axioms and the investigations from them for a research of dynamics of machines: in col.: Innovations in mechanical engineering (INMASh-2015) / collection of works VII of the International scientific and practical conference. Kuzbass state technical university of T.F. Gorbachev, Altai state technical university of I.I. Polzunov, Novosibirsk State Technical University, Biysk institute of technology, MIP Tekhmash; under V.Yu. Blyumenstein, A.A. Bakanov, O.A. Ostanin edition. – 2015. – P. 526–529.

12.Smelyagin A.I. The modern axioms of movement of the material bodies and the investigation from them : in col.: The XI All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and application-oriented mechanics / Collection of reports; originators: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Haydarov; editor-in-chief: D.A. Gubaidulin, A.I. Yelizarov, E.K. Lipachev. – 2015. – P. 3500–3502.

13.Philosophy : the textbook / under the editorship of G.V. Andreychenko, V.D. Grachev. – Stavropol : SGU publishing house, 2001. – P. 245.

14.Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of movements of mechanical systems // Science. Equipment. Technologies (polytechnical messenger). – 2015. – No. 2. – P. 19–26.

15.Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of mechanical systems of rotary motion // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2015. – No. 3. – P. 19–27.

16.Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of the movement of the chariot // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2015. – No. 10. – P. 47–62.

17.Smelyagin A.I. Application of analogs of speeds and accelerations for a research of mechanical systems by means of new axioms and theorems // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – Krasnodar : Izdatelsky Dom – Yug, 2016. – No. 2. – P. 21–29.

18.Smelyagin A.I. Application of analogs of speeds for a research of mechanical systems of rotary motion // Scientific works of the Kuban state technological university. – 2016. – No. 10. – P. 125–139.