УДК 531.8

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

THEOREM OF CHANGES KINETIC ENERGY OF BODIES AND MECHANICAL SYSTEMS WITH SEVERAL DEGREES OF FREEDOM

Смелягин Анатолий Игоревич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики,
Кубанский государственный
технологический университет
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoli Igorevich
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of Department of
theoretical mechanics,
Kuban State University of Technology
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Показано, что теорема об изменении кинетической энергии ранее выводилась для материальной точки и для системы материальных точек без учета их фактической подвижности. Поэтому она фактически описывала движение только тел и механических систем с одной степенью свободы. С целью расширения областей применения выведена теорема об изменении кинетической энергии для тел и механических систем с любым числом степеней свободы. С помощью выведенной теоремы исследован свободный полет вращающегося колеса.

Ключевые слова: теорема, кинетическая энергия, степень свободы, тело, механическая система, работа, сила, момент.

Annotation. It is shown that the theorem of change of kinetic energy above conclusions for the material point and system of material points without taking into account their actual mobility. Therefore, it is actually only describes the motion of bodies and mechanical systems with one degree of freedom. To expand the application areas derived the theorem of change of kinetic energy of bodies and mechanical systems with any number of degrees of freedom. With the help of the deduced theorems studied free flight rotating wheel.

Keywords: theorem, the kinetic energy, the degree of freedom, body, mechanical system, work, force, moment.

Введение

Основные законы о движении материальных объектов впервые были сформулированы великим английским ученым И. Ньютоном [1]. Заметим, что современные трактовки законов Ньютона многообразны, хотя по смыслу и содержанию совершенно идентичны [2–4].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [2–4] показал, что они описывают движение только абстрактных материальных объектов – материальных точек. Следовательно, законы Ньютона корректно можно использовать только для исследования не существующих в природе объектов, а именно материальных точек.

В работах [5–16] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия и выведены теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы, а также показана эффективность их применения для исследования материальных тел и механических систем.

В [4, 6] показано, что энергия является основным, первичным понятием определяющим движение и взаимодействие материальных объектов и доказана теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.

То есть

$$T + T_0 = A, \tag{1}$$

где A – работа сил и моментов сил, действующих на тело, на исследуемом перемещении; T и T_0 – кинетическая энергия исследуемого объекта в конечном и начальном положении, соответственно.

Как следует из [6] теорема об изменении кинетической энергии выводилась для материальной точки и для системы материальных точек без учета их фактической подвижности. Поэтому уравнение (1) фактически пригодно только для описания движения тел и механических систем, с одной степенью свободы.

Рассмотрим возможность применения теоремы об изменении кинетической энергии для тел и механических систем с несколькими степенями свободы.

Теорема об изменении кинетической энергии.

Кинетическая энергия тела, имеющего n степеней свободы, в общем случае определится

$$T = T_{\text{П}} + T_{\text{В}}, \tag{2}$$

где $T_{\text{П}}$ и $T_{\text{В}}$ – кинетические энергии колеса при его поступательном и вращательном движениях, соответственно.

Найдем эти энергии.

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движения тела, соответственно, определятся

$$T_{\text{П}} = \frac{mV^2}{2}, \tag{3}$$

$$T_B = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{4}$$

где m, I – масса и момент инерции относительно оси вращения тела; V, ω – линейная, центра масс, и угловая скорости тела, соответственно.

Линейная и угловая скорости тела, в проекциях на оси Декартовой системы координат, будут иметь вид

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \tag{5}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{6}$$

С учетом (3–6), из (2) найдем кинетическую энергию тела, имеющего n степеней свободы

$$T = \frac{m}{2}\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) + \frac{I}{2}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right). \tag{7}$$

Найдем работу сил и моментов сил, действующих на тело, при его перемещении

$$A = A_F + A_M, \tag{8}$$

где A_F и A_M – работа сил и моментов сил, соответственно.

Работа сил и моментов определится

$$A_F = \int \bar{F}(\bar{S}) \cdot d\bar{S}; \tag{9}$$

$$A_M = \int \bar{M}(\bar{\varphi}) \cdot d\bar{\varphi}, \tag{10}$$

где S, φ – соотвественно, премещение и угол поворота исследуемого тела.

Представим силы, моменты сил, перемещения и углы поворота, соответственно, через их проекции на координатные оси и единичные орты

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{\imath} + F_y \cdot \bar{\jmath} + F_z \cdot \bar{k}; \tag{11}$$

$$\bar{M} = M_x \cdot \bar{\imath} + M_y \cdot \bar{\jmath} + M_z \cdot \bar{k}; \tag{12}$$

$$\bar{S} = dx \cdot \bar{\imath} + dy \cdot \bar{\jmath} + dz \cdot \bar{k}; \tag{13}$$

$$\bar{\varphi} = d\varphi_x \cdot \bar{\imath} + d\varphi_y \cdot \bar{\jmath} + d\varphi_z \cdot \bar{k}. \tag{14}$$

Подставим (11–14) в (9–10), в результате получим

$$A_F = \int \left(F_x \cdot \bar{\imath} + F_y \cdot \bar{\jmath} + F_z \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(dx \cdot \bar{\imath} + dy \cdot \bar{\jmath} + dz \cdot \bar{k}\right); \quad (15)$$

$$A_M = \int \left(M_x \cdot \bar{\imath} + M_y \cdot \bar{\jmath} + M_z \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(d\varphi_x \cdot \bar{\imath} + d\varphi_y \cdot \bar{\jmath} + d\varphi_z \cdot \bar{k}\right). \quad (16)$$

Из (15–16) следует, что их подинтегральные выражения представляют собой скалярные произведения векторов. Следовательно

$$\bar{\imath} \cdot \bar{\imath} = 1; \quad (17)$$

$$\bar{\jmath} \cdot \bar{\jmath} = 1; \quad (18)$$

$$\bar{k} \cdot \bar{k} = 1; \quad (19)$$

$$\bar{\imath} \cdot \bar{\jmath} = 0; \quad (20)$$

$$\bar{\imath} \cdot \bar{k} = 0; \quad (21)$$

$$\bar{k} \cdot \bar{\jmath} = 0. \quad (22)$$

С учетом (17–22), после ряда преобразований (15–16), получим

$$A_F = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz; \quad (23)$$

$$A_M = \int M_x d\varphi_x + \int M_y d\varphi_y + \int M_z d\varphi_z. \quad (24)$$

Обозначим

$$A_{\Pi x} = \int F_x\, dx; \quad (25)$$

$$A_{\Pi y} = \int F_y\, dy; \quad (26)$$

$$A_{\Pi z} = \int F_z\, dz; \quad (27)$$

$$A_{Bx} = \int M_x\, d\varphi_x; \quad (28)$$

$$A_{By} = \int M_y\, d\varphi_y; \quad (29)$$

$$A_{Bz} = \int M_z\, d\varphi_z, \quad (30)$$

где $A_{\Pi x}, A_{\Pi y}, A_{\Pi z}, A_{Bx}, A_{By}, A_{Bz}$ – соответственно, работы сил и моментов сил при поступательном и вращательном движении тела вдоль и вокруг соответствующих осей.

С учетом принятых обозначений (25–30), формулы (23–24) примут вид

$$A_F = A_{\Pi x} + A_{\Pi y} + A_{\Pi z}; \quad (31)$$

$$A_M = A_{Bx} + A_{By} + A_{Bz}. \quad (32)$$

Подставим (31–32) в (1) и, учитывая (7), получим

$$\frac{m}{2}\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) + \frac{I}{2}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right) - \frac{m}{2}\left(V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + V_{0z}^2\right) - \frac{I}{2}\left(\omega_{0x}^2 + \omega_{0y}^2 + \omega_{0z}^2\right) = A_{\Pi x} + A_{\Pi y} + A_{\Pi z} + A_{Bx} + A_{By} + A_{Bz} \quad (33)$$

Преобразуем (33)

$$\frac{mV_x^2}{2} - \frac{mV_{0x}^2}{2} + \frac{mV_y^2}{2} - \frac{mV_{0y}^2}{2} + \frac{mV_z^2}{2} - \frac{mV_{0z}^2}{2} + \frac{I\omega_x^2}{2} - \frac{I\omega_{0x}^2}{2} + \frac{I\omega_y^2}{2} - \frac{I\omega_{0y}^2}{2} + \frac{I\omega_z^2}{2} - \frac{I\omega_{0z}^2}{2} = A_{\Pi x} + A_{\Pi y} + A_{\Pi z} + A_{Bx} + A_{By} + A_{Bz} \quad (34)$$

Введем обозначения

$$\mathrm{T}_{\Pi x} = \frac{mV_x^2}{2}; \quad (35)$$

$$\mathrm{T}_{\Pi 0x} = \frac{mV_{0x}^2}{2}; \quad (36)$$

$$\mathrm{T}_{\Pi y} = \frac{mV_y^2}{2}; \quad (37)$$

$$\mathrm{T}_{\Pi 0y} - \frac{mV_{0y}^2}{2}; \tag{38}$$

$$\mathrm{T}_{\Pi z} = \frac{mV_z^2}{2}; \tag{39}$$

$$\mathrm{T}_{\Pi 0z} = \frac{mV_{0z}^2}{2}; \tag{40}$$

$$\mathrm{T}_{Bx} = \frac{I\omega_x^2}{2}; \tag{41}$$

$$\mathrm{T}_{B0x} = \frac{I\omega_{0x}^2}{2}; \tag{42}$$

$$\mathrm{T}_{By} = \frac{I\omega_y^2}{2}; \tag{43}$$

$$\mathrm{T}_{B0y} = \frac{I\omega_{0y}^2}{2}; \tag{44}$$

$$\mathrm{T}_{Bz} = \frac{I\omega_z^2}{2}; \tag{45}$$

$$\mathrm{T}_{B0z} = \frac{I\omega_{0z}^2}{2}, \tag{46}$$

где $\mathrm{T}_{\Pi x}, \mathrm{T}_{\Pi 0x}, \mathrm{T}_{\Pi y}, \mathrm{T}_{\Pi 0y}, \mathrm{T}_{\Pi z}, \mathrm{T}_{\Pi 0z}, \mathrm{T}_{Bx}, \mathrm{T}_{B0x}, \mathrm{T}_{By}, \mathrm{T}_{B0y}, \mathrm{T}_{Bz}, \mathrm{T}_{B0z}$ – соответственно, кинетические энергии тела при его движении вдоль и вокруг соответствующих осей.

С учетом принятых обозначений (35–40), равенство (34) примет вид

$$\mathrm{T}_{\Pi x} - \mathrm{T}_{\Pi 0x} + \mathrm{T}_{\Pi y} - \mathrm{T}_{\Pi 0y} + \mathrm{T}_{\Pi z} - \mathrm{T}_{\Pi 0z} + \mathrm{T}_{Bx} - \mathrm{T}_{B0x} + \mathrm{T}_{By} - \mathrm{T}_{B0y} + \mathrm{T}_{Bz} - \mathrm{T}_{B0z} = A_{\Pi x} + A_{\Pi y} + A_{\Pi z} + A_{Bx} + A_{By} + A_{Bz} \tag{47}$$

Анализ (47) показывает, что равенство (34) включает в себя изменения кинетической энергии тела в проекциях на координатные оси. Представим (47) следующим образом

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{\Pi x} - \mathrm{T}_{\Pi 0x} = A_{\Pi x} \\ \mathrm{T}_{\Pi y} - \mathrm{T}_{\Pi 0y} = A_{\Pi y} \\ \mathrm{T}_{\Pi z} - \mathrm{T}_{\Pi 0z} = A_{\Pi z} \\ \mathrm{T}_{Bx} - \mathrm{T}_{B0x} = A_{Bx} \\ \mathrm{T}_{By} - \mathrm{T}_{B0y} = A_{By} \\ \mathrm{T}_{Bz} - \mathrm{T}_{B0z} = A_{Bz} \end{cases}. \tag{48}$$

Из (48) следует, что если твердое тело имеет несколько степеней свободы, то изменения кинетической энергии этого тела вдоль и вокруг соответствующих осей равно соответствующим работам.

Для механической системы взаимосвязанных между собой тел (48) можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{\Pi xi} - \mathrm{T}_{\Pi 0xi} = A_{\Pi xi} \\ \mathrm{T}_{\Pi yi} - \mathrm{T}_{\Pi 0yi} = A_{\Pi yi} \\ \mathrm{T}_{\Pi zi} - \mathrm{T}_{\Pi 0zi} = A_{\Pi zi} \\ \mathrm{T}_{Bxi} - \mathrm{T}_{B0xi} = A_{Bxi} \\ \mathrm{T}_{Byi} - \mathrm{T}_{B0yi} = A_{Byi} \\ \mathrm{T}_{Bzi} - \mathrm{T}_{B0zi} = A_{Bzi} \end{cases}, \tag{49}$$

где i – порядковый номер тела входящего в механическую систему.

Из (49) следует, что если механическая система имеет несколько степеней свободы, то изменения кинетической энергии тел, входящих в эту систему, вдоль и вокруг соответствующих осей равно соответствующим работам.

Часто на практике приходится исследовать тела и системы тел, которые совершают движение в плоскости. Для исследования таких объектов системы уравнений (48) и (49) упростятся и примут вид

$$\begin{cases} \text{Т}_{\text{П}x} - \text{Т}_{\text{П}0x} = A_{\text{П}x} \\ \text{Т}_{\text{П}y} - \text{Т}_{\text{П}0y} = A_{\text{П}y}; \\ \text{Т}_{Bz} - \text{Т}_{B0z} = A_{\text{П}z} \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} \text{Т}_{\text{П}xi} - \text{Т}_{\text{П}0xi} = A_{\text{П}xi} \\ \text{Т}_{\text{П}yi} - \text{Т}_{\text{П}0yi} = A_{\text{П}yi}. \\ \text{Т}_{Bzi} - \text{Т}_{B0zi} = A_{\text{П}zi} \end{cases} \tag{51}$$

Рассмотрим практическое применение выведенной теоремы при исследовании, например, движения вращающегося колеса.

Свободный полет в плоскости колеса

Исследуем, например, свободный полет колеса (рис. 1) в вертикальной плоскости.

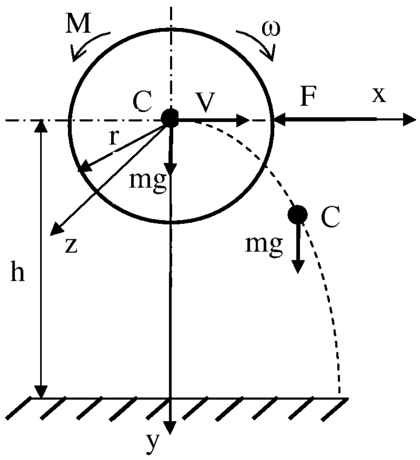

Рисунок 1 – Расчетная схема

При исследовании движения колеса примем, что колесо представляет собой кольцо. Считаем, что колесо имеет радиус r и массу m, которая сосредоточена в точке C пересечения осей симметрии колеса. Для широты исследования примем, что на колесо действуют момент $M = const$ и сила $F = const$, которые препятствуют (сопротивляются) движению. Движение колеса исследуем при следующих начальных условиях, что начальный момент времени $t = 0$ начальные:

– линейные V и угловая ω скорости, соответственно, равны $V_x = V_{0x}$, $V_{0y} = 0$, $\omega = \omega_0$;

– перемещения, линейные x, y и угловое φ, равны, соответственно, $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$.

Из расчетной схемы следует, что исследуемое колесо совершает два поступательных движения вдоль осей x, y и одно вращательное вокруг оси z, следовательно, оно совершает свободное плоско-паралельное движение и имеет три степени свободы. Тогда для определения законов движения колеса воспользуемся системой уравнений (50).

При принятых начальных условиях $t = 0$ и $V_{0y} = 0$ кинетическая энергия колеса в начальный момент времени при его движении вдоль оси y будет равна нулю, то есть

$$\text{Т}_{\text{П}0y} = 0. \tag{51}$$

С учетом (51) уравнения (50) примут вид

$$\text{Т}_{\text{П}x} - \text{Т}_{\text{П}0x} = A_{\text{П}x}; \tag{52}$$

$$\text{Т}_{\text{П}y} = A_{\text{П}y}; \tag{53}$$

$$\text{Т}_{Bz} - \text{Т}_{B0z} = A_{Bz}. \tag{54}$$

Раскроем последовательно уравнения (52–54).

Кинетическая энергия колеса в начальный момент и исследуемый момент времени при его движении вдоль оси x, соответственно, определится

$$T_{Пx} = \frac{mV_x^2}{2}; \qquad (55)$$

$$T_{П0x} = \frac{mV_{0x}^2}{2}. \qquad (56)$$

Работа силы F противодейтвующей движению колеса вдоль оси x будет

$$A_{Пx} = -Fx\,. \qquad (57)$$

Подставим (55–57) в (52)

$$\frac{mV_x^2}{2} - \frac{mV_{0x}^2}{2} = -Fx. \qquad (58)$$

Из (58) найдем скорость колеса при его движении вдоль оси x

$$V_x = \sqrt{V_{0x}^2 - \frac{2F}{m}x}. \qquad (59)$$

Анализ (59) показывает, что в начальный период движения колеса вдоль оси x оно сначала будет удаляться от начальной точки своего движения, а потом оно прекратит свое движение.

Найдем, когда колесо остановится. Колесо прекратит движение вдоль оси x, когда подкоренное выражение в (59) обратится в ноль, то есть

$$V_{0x}^2 - \frac{2F}{m}x = 0. \qquad (60)$$

Из (60) найдем расстояние, которое пройдет колесо вдоль оси x

$$x = \frac{m}{2F}V_{0x}^2\,. \qquad (61)$$

Для определения закона движения колеса вдоль оси x представим (59) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{V_{0x}^2 - \frac{2F}{m}x}\,. \qquad (62)$$

Разделив в (62) переменные и проинтегрировав полученное уравнение, после ряда преобразований найдем

$$-\frac{m}{F}\sqrt{V_{0x}^2 - \frac{2F}{m}x} = t + C_1, \qquad (63)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставив в (63) начальные условия, определим C_1

$$C_1 = -\frac{m}{F}V_{0x}. \qquad (64)$$

С учетом (64), из (63) найдем закон движения колеса вдоль оси x

$$x = t\left(V_{0x} - \frac{F}{2m}t\right). \qquad (65)$$

Найдем, через какое время колесо могло бы вернуться в первоначальную точку, если бы сила сопротивления F после остановки колеса превратилась в движущую силу. Для этого приравняем к нулю (65)

$$t\left(V_{0x} - \frac{F}{2m}t\right) = 0. \qquad (66)$$

Из (66) следует:

$-t = 0$, что тривиально:

$-t = \frac{2m}{F}V_{0x}$.

Теперь выразим скорость колеса через время, для чего подставим (63) в (59). После ряда преобразований получим

$$V_x = V_{0x} - \frac{F}{m}t\,. \qquad (67)$$

Формулы (65) и (67) для определения перемещения и скорости колеса при его свободном перемещении вдоль оси x полностью совпадают с формулами, которые можно найти из второго закона Ньютона для материальной точки. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Теперь рассмотрим движение колеса вдоль оси y. Для чего применим теорему об изменении кинетической энергии, которая в этом случае имеет вид (53).

Кинетическая энергия колеса при его движении вдоль оси y будет

$$\mathrm{T}_{\Pi y} = \frac{mV_y^2}{2}. \tag{68}$$

Работа, которую совершат силы тяжести при движении колеса, определится

$$A_{\Pi y} = mgy. \tag{69}$$

В соответствии с (53), приравняем между собой (68) и (69)

$$\frac{mV_y^2}{2} = mgy. \tag{70}$$

Из (70) найдем скорость движения колеса вдоль оси y

$$V_y = \sqrt{2gy}. \tag{71}$$

Представим (71) в виде

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}. \tag{72}$$

Разделив в (72) переменные и после интегрирования получившегося уравнения, получим

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2g}t + C_2, \tag{73}$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Подставив в (73) начальные условия, найдем

$$C_2 = 0. \tag{74}$$

С учетом (74), закон движения колеса вдоль оси y (3) примет вид

$$y = \frac{gt^2}{2}. \tag{75}$$

Найдем закон изменения скорости во времени для чего (75) подставим в (71) в результате получим

$$V_y = gt. \tag{76}$$

Формулы (75) и (76) для определения перемещения и скорости колеса при его свободном перемещении вдоль оси y полностью совпадают с формулами, которые можно найти из второго закона Ньютона для материальной точки. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Теперь рассмотрим вращение колеса вокруг оси z. Для чего исследуем уравнение (54).

Кинетическая энергия вращающегося колеса при его вращении вокруг оси z в начальный и исследуемый моменты времени определится, соответственно

$$\mathrm{T}_{Bz} = \frac{I_z\omega_z^2}{2}. \tag{77}$$

$$\mathrm{T}_{B0z} = \frac{I_z\,\omega_{0z}^2}{2}. \tag{78}$$

Работа момента M, противодействующего вращению колеса вокруг оси z, определится

$$A_{Bz} = -M\varphi. \tag{79}$$

Подставив (77–79) в (54) в результате получим

$$\frac{I_z\omega_z^2}{2}-\frac{I_z\omega_{0z}^2}{2}=-M\varphi. \qquad (80)$$

Видно, что уравнение (80) по виду полностью совпадает с уравнением (58) и имеет аналогичные начальные условия. Следовательно, решение этого уравнения будет подобным решению уравнения (58). Тогда вращение колеса вокруг оси z будет происходить по закону

$$\varphi_z=t\omega_{0z}-\frac{M}{2I_z}t^2. \qquad (81)$$

Угловая скорость колеса будет

$$\omega_z=\omega_{0z}-\frac{M}{I_z}t. \qquad (82)$$

Формулы (81) и (82) для определения вращения и угловой скорости колеса вокруг оси z полностью совпадают с формулами, которые можно найти из дифференциальных уравнений вращательного движения тел. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Выводы

– Доказано, что теорема об изменении кинетической энергии может применяться как для тел, так и для механических систем с любым числом степеней свободы.

– Теорема об изменении кинетической энергии является универсальной теоремой, которая может применяться для исследования всех видов механического движения.

Литература:

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М. : Наука, 1989. – 688 с.
2. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 1. – С. 21–25.
3. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 11–16.
4. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 17–26.
5. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 3. – С. 19–34.
6. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 4. – С. 21–29.
7. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 1. – С. 19–27.
8. Смелягин А.И. О необоснованности применения законов Ньютона для исследования динамики машин или современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них // В сборнике: проблемы механики современных машин материалы VI международной конференции. Ответственный редактор В.С. Балбаров. – 2015. – С. 344–350.
9. Смелягин А.И. Современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Составители : Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; Ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – 2015. – С. 3500–3502.
10. Смелягин А.И. Современные аксиомы и следствия из них для исследования динамики машин // В сборнике: Инновации в машиностроении (ИНМАШ-2015): сборник трудов VII Международной научно-практической конференции. Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Новосибирский государственный технический университет, Бийский технологический институт, МИП Техмаш; под редакцией Блюменштейна В.Ю., Баканова А.А., Останина О.А. – 2015. – С. 526–529.
11. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движений механических систем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 2. – С. 19–26.

12. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования механических систем вращательного движения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 3. – С. 19–27.
13. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движения колесницы // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2015. – № 10. – С. 47–62.
14. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 263 с.
15. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей и ускорений для исследования механических систем с помощью новых аксиом и теорем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2016. – № 2. – С. 21–29.
16. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей для исследования механических систем вращательного движения // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2016. – № 10. – С. 125–139.

References:

1. Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural filosofii. – M. : Nauka, 1989. – 688 p.
2. Smelyagin A.I. The objects for which formulated the axioms or laws of classical mechanic // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 1. – P. 21–25.
3. Smelyagin A.I. The axioms or laws of motion formulated by Newton // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 11–16.
4. Smelyagin A.I. Main, the primary concepts of mechanic // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 17–26.
5. Smelyagin A.I. The axioms of motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 3. – P. 19–34.
6. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanic // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 4. – P. 21–29.
7. Smelyagin A.I. Application of new axioms and corollaries of them to study the movements of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 1. – P. 19–27.
8. Smelyagin A.I. About groundless application of Newton's laws to study the dynamics of machines or modern axiom of motion of material bodies and their consequence // In the collection: Problems of mechanics of modern machines of the VI International Conference. Editor V.S. Balbarov. – 2015. – P. 344–350.
9. Smelyagin A.I. Modern axioms of motion of material bodies and their consequence // In the collection: the XI All-Russian Congress on fundamental issues of Theoretical and Applied Mechanic. The collection of report. Compiled by D.J. Akhmetov, A.N. Gerasimov, S.H. Khaydarov; Managing editors: D.A. Gubaidullin, A.I. Elizarov, E.K. Lipachev. – 2015. – P. 3500–3502.
10. Smelyagin A.I. Modern axioms and their consequences for the study of dynamics of machine // In: Innovations in mechanical engineering (INMASH 2015) Proceedings of the VII International scientific-practical conference. Kasbahs State Technical University named after T.F. Gorbachev, Altai State Technical University. II Polzunova, Novosibirsk State Technical University, Biisk Technological Institute, IPI Techmash; edited Blumenstein V.Y., Bakanova A.A., Ostanina O.A. – 2015. – P. 526–529.
11. Smelyagin A.I. Application of new axioms and corollaries to study movements of mechanical system // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 2. – P. 19–26.
12. Smelyagin A.I. Application of new axioms and corollaries for the study of mechanical systems of rotational motion // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 3. – 2015. – P. 19–27.
13. Smelyagin A.I. Application of new axioms and corollaries to study motion chariot // Proceedings of the Kuban State University of Technology. – 2015. – № 10. – P. 47–62.
14. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines. Course design. – M. : INFRA-M, 2003. – 263 p.
15. Smelyagin A.I. The use of analog speed and acceleration for the study of mechanical systems with new axioms and theorem // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2016. – № 2. – P. 21–29.
16. Smelyagin A.I. Application rates for investigating analogs mechanical systems rotary motion // Proceedings of the Kuban State University of Technology. – 2016. – № 10. – P. 125–139.