УДК 519.6+621.01

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

–––––––

APPLICATION OF METHODS OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS TO SOLVE PROBLEMS THEORETICAL MECHANICS

Выскубов Евгений Владимирович
кандидат технических наук,
доцент 105 кафедры механики

Терехов Владимир Валерьевич
кандидат технических наук, доцент,
заведующий 105 кафедрой механики
филиал ВУНЦ ВВС «ВВА им. Ю.А. Гагарина и профессора Н.Е. Жуковского» (г. Краснодар)
Тел.: +7(909) 44-42-292
partner2002@front.ru

Vyskubov Evgenij Vladimirovich
Ph.D.,
Docent of 105 Department of mechanics

Terekhov Vladimir Valerevich
Ph.D., associate professor,
Head of 105 Department of mechanics
Russian Air Force Military Educational and Scientific Centre «Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin» (Krasnodar branch)
Ph.: +7(909) 44-42-292
partner2002@front.ru

Аннотация. Рассмотрено сочетания аналитических подходов при формализации расчетных задач по механике с численными методами их реализации на ЭВМ. Для более глубокого освоения теоретического материала и развития навыков практического применения компьютерных технологий.

Ключевые слова: теоретическая механика, статика, равновесие системы, реакция связей, сочлененное тело, шарнир, стержень, вычислительная математика, система линейных алгебраических уравнений, метод простых итераций.

Annotation. Considered a combination of analytical approaches to the formalization of computational problems in mechanics with numerical methods for their computer implementation. For a deeper understanding of the theoretical material and the development of skills of practical application of computer technology.

Keywords: theoretical mechanics, statics, equilibrium of the system, the response relations, articulated body, hinge rod, computational mathematics, the system of linear algebraic equations, the method of simple iterations.

Среди общетехнических дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях, одно из важных мест занимает теоретическая механика: либо в качестве самостоятельной дисциплины, либо как часть курса «механика».

При изучении первого раздела этой дисциплины — статики — студенты должны владеть тригонометрией, знать основы векторной алгебры и уметь пользоваться методами решения систем линейных алгебраических уравнений.

Однако к моменту начала изучения курса теоретической механики студенты, как правило, обладают навыками решения практических задач на ЭВМ, а параллельно с ним осваивают методы вычислительной математики.

Нам представляется, что сочетание аналитических подходов при формализации расчетных задач с численными методами их реализации на ЭВМ будет способствовать более глубокому освоению теоретического материала и развитию навыков практического применения компьютерных технологий.

Рассмотрим классическую задачу статики, связанную с применением условий равновесия плоской системы произвольных сил для определения реакций связей. Будем считать, что задача статически определима, т.е. количество неизвестных в задаче не превышает числа уравнений статики.

Необходимые и достаточные условия равновесия такой системы определяются равенствами нулю главного вектора и главного момента. В проекциях на оси координат эти условия (основная форма условий равновесия) запишутся в виде [1]:

$$\sum_k F_{kx} = 0,$$
$$\sum_k F_{ky} = 0,$$
$$\sum_k m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Следовательно, в общем случае может быть определено не более трех неизвестных. При этом решение системы трех алгебраических уравнений не вызывает никаких затруднений.

Однако при определении реакций связей сочлененных конструкций каждое сочлененное тело, как известно, рассматривается в отдельности, что кратно увеличивает количество уравнений статики и существенно усложняет вычислительный процесс.

Если через ai обозначить j-ю проекцию ($j = x$ или $j = y$) k-ой связи, то условия равновесия можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений [2]:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \\ \varphi_2(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \\ ... \\ \varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \end{array}\right\},$$

где φ_i — i-ое условие равновесия, $i = 0…n$.

Перепишем i-ое условие равновесия в виде:

$$a_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, ..., a_n).$$

Тогда, задав начальное приближение

$$A^0 = \left(a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0\right),$$

получим итерационные формулы для определения неизвестных реакций связей:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^{k+1} = f_1\left(a_2^k, ..., a_n^k\right), \\ .... \\ a_i^{k+1} = f_i\left(a_1^k, a_2^k, a_{i-1}^k, a_{i+1}^k, ..., a_n^k\right), \\ .... \\ a_n^{k+1} = f_n\left(a_1^k, a_2^k, ..., a_{n-1}^k\right), \end{array}\right\},$$

где k — индекс итерации.

Итерационный процесс завершается при выполнении условия:

$$\max_i \left|a_i^{k+1} - a_i^k\right| < \varepsilon,$$

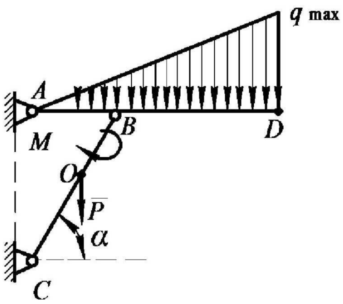
где ε — заданная точность нахождения неизвестных.

Достаточные условия сходимости процесса выполняются, если коэффициенты системы по модулю меньше 1.

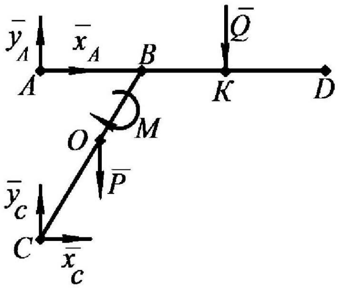
Для системы линейных алгебраических уравнений метод простых итераций сходится при выполнении условий:

$$\left|c_{ii}\right| > \sum_{\substack{J=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|c_{ij}\right|, \; i = 1 ... n,$$

где c_{ij} — коэффициенты системы.



В качестве примера применения такого подхода рассмотрим задачу по определению реакции шарниров, на которых закреплен кронштейн, состоящий из стержней AD и BC пренебрежимо малой массы [3]. Стержни шарнирно соединены между собой в точке В и шарнирно прикреплены в точках A и C к вертикальной стенке. При этом горизонтальный стержень AD нагружен распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью $q_{\max}$, наклонный стержень BC нагружен парой сил с моментом M, в точке O приложена сила $\overline{P}$, причем $OC = OB$.



Для определения реакции шарниров A и C заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 0{,}5 \cdot q_{\max}\, AD$, приложенной в точке K стержня AD. Воспользовавшись принципом освобождаемости от связей, отбросим внешние связи и заменим их реакциями, приложенными в точках A и C: соответственно X_A, Y_A, X_C, Y_C.

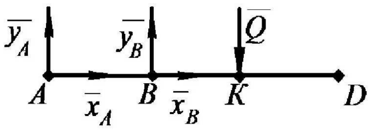
Условия равновесия в этом случае можно записать так:

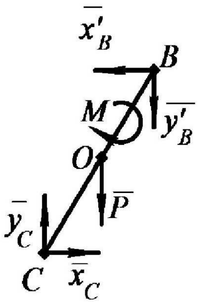
$$\sum_k F_{kx} = 0: \ X_A + X_C = 0;$$

$$\sum_k F_{ky} = 0: Y_A + Y_C - P - Q = 0;$$

$$\sum_k m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0: X_C \cdot AC - M - Q \cdot AK - 0{,}5P \cdot AB = 0.$$

Полученные три уравнения содержат четыре неизвестных, поэтому расчленим систему по шарниру B на отдельные твердые тела: горизонтальный стержень AD и наклонный стержень BC, приложив к каждому из тел в точке B равные по величине и противоположные по направлению силы действия одного тела на другое: $\overline{R}_B = -\overline{R}_B^{/}$. Расчетные схемы в этом случае имеют вид:





Условия равновесия для горизонтального стержня имеют вид:

$$\sum_k F_{kx} = 0: \ X_A + X_B = 0;$$

$$\sum_k F_{ky} = 0: Y_A + Y_B - Q = 0;$$

$$\sum_k m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0: \ -Y_B \cdot AB - Q \cdot BK \ = 0,$$

а для наклонного:

$$\sum_k F_{kx} = 0: \ X_C - X_B^{/} = 0;$$

$$\sum_k F_{ky} = 0: Y_C - Y_B^{/} - P = 0;$$

$$\sum_k m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0: \ -Y_C \cdot BC \cdot \cos\alpha + X_C \cdot BC \cdot \sin\alpha + 0{,}5P \cdot BC \cdot \cos\alpha - M = 0.$$

В этих уравнениях $AC = AB \cdot \sin\alpha$, $AK = 2/3AD$, $BK = AK - AB$. Теперь из девяти уравнений нужно выбрать шесть, из которых наиболее просто определяются неизвестные опорные реакции X_A, Y_A, X_C, Y_C и реакции внутреннего шарнира X_B, Y_B. В результате решения системы уравнений получаем:

$$X_B = X_C = -X_A = \frac{M + Q \cdot AK + 0{,}5P \cdot AB}{AC};$$
$$Y_C = P + Q\left(1 + \frac{BK}{AB}\right);$$
$$Y_A = -Q\frac{BK}{AB};$$
$$Y_B = Q\frac{AK}{AB}.$$

Для применения метода простых итераций разрешим шесть условий равновесия, например, первых двух систем, относительно неизвестных:

$$X_A = -X_C;$$
$$Y_C = P + Q - Y_A;$$
$$X_C = \frac{M + Q \cdot AK + 0{,}5P \cdot AB}{AC};$$
$$X_B = -X_A;$$
$$Y_B = Q - Y_A;$$
$$Y_A = -Q\frac{BK}{AB}.$$

Зададимся следующими исходными данными: P = 10 Н, Q = 30 Н, M = 50 Н·м, AB = 1 м, BC = 2 м, AD = 6 м. В этом случае точное решение: $X_B = X_C = -X_A$ = 350 Н, Y_A = –90 Н, Y_B = 120 Н, Y_C = 130 Н. При нулевом начальном приближении численное решение с точностью 10^{-6} получается за три итерации.

Литература:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики : Учеб. для втузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 416 с.
2. Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. – М. : Высш. шк., 1990. – 255 с.
3. Пневская Н.И. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / под ред. В.И. Гузеева. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 56 с.

References:

1. Tapr S.M. Short course of theoretical mechanics: Studies. for technical colleges. – 10th prod., feather slave. and additional – M. : Vyssh. scool, 1986. – 416 p.
2. Shup T.E. Applied numerical methods in the physicist and the technician: The lane with English. – M. : Vyssh. scool, 1990. – 255 p.
3. Pnevskiya N.I. Teoreticheskaya of the mechanic. Statics : edition manual / under ed. of V. I. Guzeev. – Chelyabinsk : Publishing house Southern Ural state university, 2007. – 56 p.