УДК 539.3

Молдаванов Сергей Юрьевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики
Кубанского государственного технологического университета
set@id-yug.com

Moldavanov Sergey Yurievich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Production of Building Constructions and Structural Mechanics Kuban State University of Technology
set@id-yug.com

Дунаев Владислав Игоревич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры производства строительных конструкций и строительной механики
Кубанского государственного технологического университета

Dunaev Vladislav Igorevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Production of Building Constructions and Structural Mechanics
Kuban State University of Technology

Аннотация. В данной работе рассмотрена термофлуктуационная теория прочности твердых тел. В рамках этой теории получены формулы для прогнозирования пределов длительной прочности термоупругих тел при различных видах сжатия. Установлено, что величина безопасного напряжения при сжатии зависит от физико-механических констант материала. Для ряда технических стекол получена численная оценка величины безопасных напряжений при сжатии.

Annotation. This paper considers the theory of termofluktuacion strength of solids. Under this theory, the equations for the prediction of long-term strength of thermoelastic solids with different types of compression. Set the value of a safe low voltage of compression depends on the physical and mechanical material constants. For a number of technical glasses obtained numerical estimation of compressive stresses safety.

Ключевые слова: прочность термоупругих тел при малых деформациях, долговечность материалов.

Keywords: strength of thermoelastics solids at small deformations, the durability of the materials.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ НЕОРГАНИЧЕСКИХ СТЕКОЛ ПРИ СЖАТИИ

♦ ♦ ♦

CALCULATION OF THE LIMIT OF LONG DURABILITY OF INORGANIC GLASSES WITH COMPRESSION

Разрушение твердых тел представляет собой процесс, происходящий во времени. Первоначальная стадия разрушения тела связана с постепенным накоплением повреждений. Накопление повреждений активируется внешними воздействиями и субмикродефектами, которые имеют макрочастицы твердого тела. Время разрушения отдельной макрочастицы можно получить исходя как из физических представлений о механизме разрушения, так и из различных феноменологических критериев разрушения.

Наиболее распространено физическое представление образования зоны повреждения или микротрещины в макрочастице твердого тела вследствие термофлуктуационного разрыва химический связей. Для определения долговечности различных материалов часто используют феноменологическую формулу Журкова [1]

$$t_p = \tau_0 \, exp \frac{U_0 - \gamma' \sigma}{kT}.$$

где $\tau_0 = 10^{-12} - 10^{-13}$ с – период одного теплового колебания; U_0 – энергия активации разрушения связи; σ – напряжение; γ' – структурно-чувствительный коэффициент; k – постоянная Больцмана; T – температура.

Формула Журкова основана на фундаментальном представлении о термофлуктуационном механизме разрушения твердых тел, однако приводит к конечному времени разрушения при отсутствии внешних напряжений.

В работе [2] была предложена термофлуктуационная теория прочности твердых тел. Основными гипотезами этой теории являются:

1. Считается справедливым принцип макроскопической определимости [3]. Из этого принципа следует, что, если на некотором интервале времени $0 \le \tau \le t$ заданы процесс нагружения $\sigma_{ij}(\tau)$, $\mu_{ijk}(\tau)$ . . . или процесс деформации $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $\gamma_{ijk}(\tau)$ . . . , а также немеханические параметры $T(\tau)$. . . , то в любой момент времени t, вплоть до разрушения, состояние макрочастицы будет однозначно определено. Следовательно, тензоры напряжений $\sigma_{ij}(\tau)$, моментов $\mu_{ijk}(\tau)$ и температура $T(\tau)$ будут однозначными функционалами функций $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $\gamma_{ijk}(\tau)$, $T(\tau)$ и наоборот. Нагружение макрочастицы сопровождается возникновением и развитием внутренних повреждений, накопление которых в некоторый момент времени приводит к ее разрушению.

2. Разрушение представляет собой необратимый процесс накопления повреждений в результате термофлуктуационного разрыва связей в поле внешних сил и других немеханических параметров. Время разрушения является случайной величиной, распределенной в интервале $\left]0, t^*\right[$, где t^* определяется из условия нормировки

$$\int_0^{t^*} p(t)dt = 1. \tag{1}$$

Здесь $p(t)$ – плотность распределения случайной величины t, или вероятность необратимого разрушения связей в единицу времени. Атомы или молекулы в твердом теле постоянно колеблются. В процессе разрушения эти кинетические единицы при разрыве связи преодолевают некоторый энергетический барьер. Пусть $\gamma(U_m - U)$ – высота этого энергетического барьера. Колеблющаяся кинетическая единица, обладающая внутренней энергией, достаточной для преодоления барьера, в состоянии действительно его преодолеть лишь в какую-то часть периода, пропорциональную множителю Больцмана

$$exp\left[-\frac{\gamma(U_m - U)}{kT(t)}\right].$$

Тогда вероятность разрыва связи в единицу времени равна:

$$w_- = \tau_0^{-1} exp\left[-\frac{\gamma(U_m - U)}{kT(t)}\right],$$

где τ_0 – период одного теплового колебания; γ – эффективный объем разрушения; U_m – максимальная внутренняя энергия связи; U – внутренняя энергия колеблющейся единицы;

$$U = U_0 + U\left[\sigma_{ij}(\tau), \mu_{ijk}(\tau)\ldots, T(\tau)\ldots\right] \text{ или}$$

$$U = U_0 + U\left[\varepsilon_{ij}(\tau), \gamma_{ijk}(\tau)\ldots, T(\tau)\ldots\right].$$

Здесь U_0 – внутренняя средняя энергия в отсутствие воздействия напряжений, деформаций или других немеханических параметров. Внутренние энергии U_m и U отнесены к единице объема.

В твердом теле наряду с процессом разрыва связей происходит и процесс их восстановления. При безопасном уровне энергии поля внешних сил и других немеханических параметров при температуре $T(t)$ вероятности разрыва w_- и восстановления

w_+ связей в единицу времени одинаковы. Исходя из принятого механизма разрыва связей следует:

1) система находится в состоянии динамического равновесия и общее число связей остается постоянным;

2) вероятность необратимого разрыва связей в единицу времени $p_0(t)$ равна нулю

$$p_0(t) = w_- - w_+ = 0;$$

$$w_- = w_+ = \tau_0^{-1} exp\left[-\frac{\gamma\left(U_m - U_0 - U\left[\sigma_{ij}^0(\tau), \mu_{jk}^0(\tau)\ldots, T(\tau)\ldots\right]\right)}{kT(t)}\right].$$

3) время необратимого разрыва связей t_0^* стремится к бесконечности, т.е. разрушения не происходит.

Здесь $\sigma_{ij}^0(\tau)$ и $\mu_{jk}^0(\tau)$ – тензоры безопасных напряжений и моментов.

При нагружении твердого тела вероятность разрыва связи равна:

$$w_- = \tau_0^{-1} exp\left[-\frac{\gamma\left(U_m - U_0 - U\left[\sigma_{ij}(\tau), \mu_{jk}(\tau)\ldots, T(\tau)\ldots\right]\right)}{kT(t)}\right],$$

а вероятность восстановления связи

$$w_- = \tau_0^{-1} exp\left[-\frac{\gamma\left(U_m - U_0 - U\left[\sigma_{ij}^0(\tau), \mu_{jk}^0(\tau)\ldots, T(\tau)\ldots\right]\right)}{kT(t)}\right].$$

Таким образом, динамическое равновесие системы нарушается и акты разрыва связей преобладают над актами их восстановления. Тогда вероятность необратимого разрыва связей в единицу времени равна:

$$p(t) = w_- - w_+ = B[T(t,\tau)]\left\{exp\left(\frac{\gamma U'\left[\sigma_{ij}(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right) - exp\left(\frac{\gamma U_0'\left[\sigma_{ij}^0(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right)\right\}. \quad (2)$$

$$B[T(t,\tau)] = \tau_0^{-1} exp\left\{-\frac{\gamma U^*[T(t,\tau)]}{kT(t)}\right\};$$

$$U^*[T(t,\tau)] = U_m - U_0 - U[0, 0, \ldots T(\tau)\ldots];$$

$$U'\left[\sigma_{ij}(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right] = U\left[\sigma_{ij}(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right] - U[0, 0, \ldots T(\tau)\ldots]. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) в условие (1), получаем уравнение для определения наибольшего времени длительной прочности твердых тел в точке с координатами x_i (i = 1, 2, 3)

$$\int_0^{t^*} B[T(t,\tau)]\left\{exp\left(\frac{\gamma U'\left[\sigma_{ij}(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right) - exp\left(\frac{\gamma U_0'\left[\sigma_{ij}^0(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right)\right\}dt = 1. \quad (4)$$

Математическое ожидание времени разрушения будет равно

$$\langle t \rangle = \int_0^{t^*} tB[T(t,\tau)]\left\{exp\left(\frac{\gamma U'\left[\sigma_{ij}(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right) - exp\left(\frac{\gamma U_0'\left[\sigma_{ij}^0(\tau), \ldots, T(\tau)\ldots\right]}{kT(t)}\right)\right\}dt. \quad (5)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны через тензоры деформаций $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $\gamma_{ijk}(\tau)$.

Рассмотренная теория длительной прочности применима при сложном нагружении и сложном напряженном состоянии к сплошным средам общего вида (изотропным, анизотропным и т.д.), для которых существует функционал внутренней энергии U и определена связь между компонентами тензоров напряжений $\sigma_{ij}(\tau)$, моментов $\mu_{ijk}(\tau)$ и тензорами деформаций $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $\gamma_{ijk}(\tau)$ вплоть до разрушения.

Внутреннюю энергию термоупругих изотропных тел при малых деформациях и малых приращениях температур представим в виде [4]:

$$u = U_0 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{kk}^2 + 3\kappa\alpha T_0\varepsilon_{kk} - \frac{9}{2}\kappa\alpha^2\left(T^2 - T_0^2\right) + \frac{c_\sigma}{2}\frac{\left(T^2 - T_0^2\right)}{T_0}. \tag{6}$$

где μ и λ – константы Лямэ; c_σ – удельная теплоемкость; α – коэффициент линейного теплового расширения;

$$U_0 \approx c_\sigma T_0;\ \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

Все эти приведенные константы в общем случае зависят от температуры. Если пренебречь указанной зависимостью в рассматриваемом интервале температур, то с учетом соотношения между деформациями и напряжениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\left(T - T_0\right)\delta_{ij},$$

получаем внутреннюю энергию в напряжениях

$$U = c_\sigma T_0 + \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E}\sigma_{kk}^2 + T\alpha\sigma_{kk} + \frac{c_\sigma}{2}\frac{\left(T^2 - T_0^2\right)}{T_0}, \tag{7}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Тогда, подставляя выражение (7) в уравнение (4), имеем

$$\int_0^{t^*}\tau_0^{-1}exp\left\{\frac{\gamma}{kT(t)}\left(U_m - c_\sigma T_0\left[1 + \left(\frac{T^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}\right)\right]\right)\right\}\left\{exp\frac{\gamma U'}{kT(t)} - exp\frac{\gamma U_0'}{kT(t)}\right\}dt = 1. \tag{8}$$

Здесь обозначено

$$U' = \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E}\sigma_{kk}^2 + T\alpha\sigma_{kk};\ U_0' = \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}^0\sigma_{ij}^0 - \frac{\nu}{2E}\left(\sigma_{kk}^0\right)^2 + T\alpha\sigma_{kk}^0. \tag{9}$$

В выражениях (8) и (9) предполагается, что температура зависит от времени.

Подробно рассмотрим случай одноосного напряженного состояния, когда $\sigma_{11} = const$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, $T = const$; $T \neq T_0$. Тогда из уравнения (4) с учетом выражений (9) получаем формулу для определения наибольшего времени длительной прочности t^* при постоянном напряжении

$$t^* = B^{-1}(T)\left\{exp\frac{\gamma}{kT}\left(\frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T\sigma\right) - exp\frac{\gamma}{kT}\left(\frac{\sigma_0^2}{2E} + \alpha T\sigma_0\right)\right\}^{-1}, \tag{10}$$

где $$B^{-1}(T) = \tau_0\, exp\left\{\frac{\gamma}{kT}\left(U_m - c_\sigma T_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right)\right]\right)\right\}.$$

Рассмотренная теория длительной прочности твердых тел позволяет установить связь между уровнем безопасных напряжений при сжатии и физикомеханическими характеристиками материала. Из уравнения (10) следует, что для случая одноосного сжатия, когда $\sigma_{11} = const = -\sigma$, время разрушения материала будет стремиться к бесконечности если

$$exp\frac{\gamma}{kT}\left(\frac{\sigma^2}{2E} - \alpha T\sigma\right) - exp\frac{\gamma}{kT}\left(\frac{\sigma_0^2}{2E} - \alpha T\sigma_0\right) = 0 .$$

Отсюда получаем

$$\sigma_0^{(1)} = 2E\alpha T . \qquad (11)$$

Аналогичным образом, записывая уравнения для внутренней энергии (9) для случая двухосного сжатия, когда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = const = -\sigma$, $\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, имеем

$$\sigma_0^{(2)} = \frac{2E\alpha T}{1-\nu} . \qquad (12)$$

Для случая всестороннего сжатия, когда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = const = -\sigma$, $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, получаем

$$\sigma_0^{(3)} = \frac{2E\alpha T}{1-2\nu} . \qquad (13)$$

Физико-механические характеристики неорганических стекол зависят от их химического состава. В соответствии с общепризнанной методикой, изложенной в справочнике [5], модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и коэффициент линейного теплового расширения α могут быть найдены по формулам аддитивности

$$E = E_1P_1 + E_2P_2 + \ldots + E_nP_n ; \qquad (14)$$

$$\alpha = \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \ldots + \alpha_nP_n ; \qquad (15)$$

$$\nu = m_1P_1 + m_2P_2 + \ldots + m_nP_n , \qquad (16)$$

где $P_1, P_2 \ldots, P_n$ – содержание соответствующего окисла в неорганическом стекле в весовых процентах; $E_1, E_2 \ldots, E_n$ – удельные константы модуля упругости окислов в стекле; $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ – то же для коэффициента линейного теплового расширения окислов; $m_1, m_2 \ldots, m_n$ – то же для коэффициента Пуассона.

Удельные константы для окислов, входящих в состав неорганических стекол определяются по справочнику по производству стекла [5]. Значения удельных констант для стекла № 20 приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Химический состав и удельные константы для стекла № 20

Окисел	P_i, %	E_i, кг/мм^2	m_i	$\alpha_i \cdot 10^7$, град$^{-1}$
SiO_2	75,7	70	0,00153	0,270
B_2O_3	6,9	60	0,00284	0,033
Al_2O_3	5,2	150	0,00175	1,670
CaO	1,3	70	0,00416	1,670
BaO	3,6	70	0,00365	1,000
Na_2O	6,2	100	0,00431	3,330
K_2O	1,2	70	0,00390	2,830

Подставляя приведенные данные в формулы (14–16) получаем следующие значения физико-механических характеристик стекла № 20:

$$E = 7540 \text{ кг/мм}^2 = 0{,}754 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \ \nu = 0{,}194 ; \ \alpha = 59 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}.$$

Аналогичным образом по формулам (11–12) можно вычислить пределы длительной прочности при сжатии для ряда технических стекол, выпускаемых промышленностью (табл. 2).

Таблица 2 – Пределы длительной прочности неорганических стекол

Марка стекла	$E\cdot10^{-5}$, МПа	ν	$\alpha\cdot10^{7}$ град$^{-1}$	Предел длительной прочности (МПа)		
				Одноосное сжатие $\sigma_0^{(1)}$	Двухосное сжатие $\sigma_0^{(2)}$	Трехосное сжатие $\sigma_0^{(3)}$
КФЗ	0,632	0,204	106	392,6	493,0	753,3
Ф-1	0,570	0,224	77	257,3	331,5	466,0
ТФЗ	0,534	0,239	93	290,8	382,3	557,9
ТК-3	0,777	0,267	84	382,6	522,1	821,7
ТК-5	0,743	0,276	83	316,3	498,7	804,7
№20	0,745	0,194	59	262,0	325,1	428,1
№23	0,757	0,223	88	390,2	502,1	703,8
№29	0,662	0,208	76	294,6	372,1	505,0
ЦЛ	0,737	0,207	80	345,3	435,6	589,9
59	0,745	0,201	48	209,6	262,3	350,3
КС-34	0,721	0,212	76	321,0	407,6	558,1
ДГ-2	0,764	0,185	47	210,5	258,1	333,6
13в	0,672	0,197	50	196,9	245,2	324,9
Пирекс	0,714	0,185	36	150,7	185,0	239,4

Литература

1. Журков С.Н., Назруллаев Б.Н. Временная зависимость прочности твердых тел // Журнал технической физики. – 1983. – Т. 23. – № 10. – С. 1677.
2. Дунаев И.М. Разрушение эластомеров // Механика эластомеров. – 1981. – С. 24–33.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – 278 с.
4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев : Высшая школа, 1975. – 216 с.
5. Справочник по производству стекла / Под ред. И.И. Китайгородского. – М. : Госстройиздат, 1963. – Т. 1. – 1026 с.

References

1. Zhurkov S.V., Nazrullaev B.N. Time dependence of strength of solids // Journal of technical physics. – 1983. – V. 23. – № 10. – P. 1677.
2. Dunaev I.M. Fracture of elastomers // Mechanics of elastomers. – 1981. – P. 24–33.
3. Ilyushin A.A. Continuum Mechanics. – M. : MGU, 1978. – 278 p.
4. Kovalenko A.D. Termo elasticity. – Kiev : High school, 1975. – 216 p.
5. Handbook of glass production / Ed. I.I. Kitajgorodskogo. – M. : Gosstroyizdat, 1963. – V. 1. – 1026 p.