УДК 533.2 + 622.691.4

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЯХ ГИДРОДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДА

TO THE QUESTION OF NON-STATIONARY MODELS OF PIPELINE HYDRODYNAMICS

Стефанов Роман Евгеньевич
АО «Газпром газораспределение Тамбов»
r.stefanov@internet

Аннотация. В статье показано, что приближённое описание газодинамических процессов в газопроводах путём замены распределённых параметров сосредоточенными является эффективным средством, позволяющим зрительно упростить динамические модели и, следовательно, получить возможность разработки программ для ЭВМ, позволяющим вести оперативные расчёты нестационарных режимов газопроводов. При этом быстродействие программ повышается в 1000 раз по сравнению с программами, основанными на использовании численных решений распределённых уравнений. Результаты выполненных исследований могут служить основой для выбора приближённой системы сосредоточенных уравнений, исходя из практических требований по сложности моделей и необходимой точности получения результатов расчётов.

Ключевые слова: методы решения газодинамических уравнений в частных производных; представительные решения задачи определения распределений давлений и расходов вдоль трубы; аналитические решения линеаризованных уравнений; оценка конечных стационарных состояний системы; разработка приближённых моделей течения газа в трубопроводе; упрощённое моделирование пространственного распределения параметров газа; замкнутая система уравнений с сосредоточенными параметрами.

Stefanov Roman Evgenievich
JSC «Gazprom Gas Distribution Tambov»
r.stefanov@internet

Annotation. The article shows that an approximate description of gas-dynamic processes in gas pipelines by replacing distributed parameters with concentrated ones is an effective means of visually simplifying dynamic models and, consequently, of developing computer programs that allow for operational calculations of non-stationary modes of gas pipelines. At the same time, the speed of programs increases by 1000 times compared to programs based on the use of numerical solutions of distributed equations. The results of the studies performed can serve as a basis for choosing an approximate system of concentrated equations based on practical requirements for the complexity of models and the required accuracy of obtaining calculation results.

Keywords: methods for solving gas-dynamic partial differential equations; representative solutions to the problem of determining the distribution of pressures and flows along a pipe; analytical solutions of linearized equations; assessment of the final steady states of the system; development of approximate models of gas flow in a pipeline; simplified modeling of the spatial distribution of gas parameters; closed system of equations with lumped parameters.

Трудности разработки программ для ЭВМ расчёта нестационарных режимов газопроводов обусловлены, с одной стороны, значительными нелинейностями в системе уравнений (1) – (2), описывающих динамику течения газа в трубопроводе, а с другой стороны – распределённостью параметров газового потока на большие расстояния. Эти факторы предопределяют сложность алгоритмов решения задач, необходимость использования большого объёма памяти ЭВМ, а также значительные затраты машинного времени, не позволяющие вести расчёты достаточно оперативно.

Большинство проведённых исследований в области динамики газопроводов связано с разработкой методов решения газодинамических уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial p^2}{\partial x} = A \cdot q^2 \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B \cdot \frac{\partial q}{\partial x}, \tag{2}$$

при

$$t = 0; \quad P(0,x) = P_н(x); \quad q(0,x) = q_н(x) \tag{3}$$

и различных краевых условиях:

$$P(0,t) = P_0(t); \quad P(1,t) = P_1(t); \tag{4}$$

$$P(0,t) = P_0(t); \quad q(1,t) = q_1(t); \tag{5}$$

$$Q(0,t)=q_0(t);\quad q(1,t)=q_1(t), \tag{6}$$

которые дают возможность получить представительные решения задачи определения распределений давлений и расходов вдоль трубы. Однако учёт распределённости параметров (1) и (2) приводит при решении к значительным затратам машинного времени, что ограничивает практическое использование разработанных [1] различных численных методов решения (1) и (2).

Аналитические решения линеаризованных уравнений (1) и (2) позволяют получать удовлетворительные динамические характеристики системы, однако при этом возникают трудности в оценках конечных стационарных состояний системы. К тому же медленная сходимость получающихся в решении рядов также обусловливает в ряде случаев большие затраты времени на проведение расчётов.

В связи с изложенным представляется перспективным направлением разработка приближённых моделей течения газа в трубопроводе, которые позволили бы проводить оперативные расчёты за счёт упрощённого моделирования пространственного распределения параметров газа, но с сохранением основных физических связей между ними. При таком подходе быстродействие программ для ЭВМ должно существенно увеличиться. Ярким примером указанного подхода может служить квазистационарная модель И.Е. Ходановича [3], позволившая получить аналитические решения для некоторых частных задач.

Далее приводятся некоторые функциональные соотношения между $P_0(t)$, $P_1(t)$, $q_0(t)$ и $q_1(t)$, которые совместно с выражениями (4) – (6) позволяют получить замкнутую систему уравнений с сосредоточенными параметрами. В отличие от [1] выбор этих соотношений проводился не путём «серого ящика», а посредством разных способов «усреднения» по пространственной координате уравнений (1) и (2), что позволяет не уклоняться от фундаментальных связей, ими выражаемых.

1. Уравнение количества движения

Сухаревым М.Г. [1] предложены две функциональные зависимости, аппроксимирующие уравнение (1):

$$P_0^2-P_1^2=\frac{A}{2}\cdot\left(q_0^2+q_1^2\right), \tag{7}$$

$$P_0^2-P_1^2=\frac{A}{4}\cdot\left(q_0+q_2\right). \tag{8}$$

Математический эксперимент показал [1], что для достаточно широкого класса возмущений (вплоть до разрывов с небольшой амплитудой), удовлетворяющих практическим потребностям, соотношения (7) и (8) приводили к удовлетворительным по точности результатам. Нетрудно видеть, что выражение (7) может быть получено после интегрирования (1) по *x* от 0 до 1 и приближённого представления получающегося выражения для среднего по длине расхода по формуле трапеций:

$$q_{cp}^2=\int_0^1 q^2\cdot dx\cong\frac{1}{2}\cdot\left(q_0^2+q_1^2\right).$$

Как известно, такая оценка интеграла может быть значительно уточнена, если учесть поправки в виде производных подынтегральной функции на концах интервала интегрирования (формула Эйлера-Маклорена):

$$q_{cp}^2\cong\frac{1}{2}\cdot\left(q_0^2+q_1^2\right)+\frac{1}{\omega}\cdot\left(\left.\frac{\partial q^2}{\partial x}\right|_{x=0}-\left.\frac{\partial q^2}{\partial x}\right|_{x=1}\right), \tag{9}$$

что повышает точность интегрирования на 2 порядка. Этот приём позволил получить следующее соотношение [2]:

$$P_0^2-P_1^2=\frac{A}{2}\cdot\left(q_0^2+q_1^2\right)+\frac{2\cdot A}{B\cdot\omega}\cdot\left(q_1\cdot\frac{\partial P_1}{\partial t}-q_0\cdot\frac{\partial P_0}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Исследования [2] показали, что концевые поправки существенно улучшают решение, при этом ω лучше взять 16, а не 12, как того требует формула численного интегрирования.

Ещё одна форма функциональной связи может быть выделена из аналитического решения И.Е. Ходановича [3], полученного из предположения (квазистационарная модель):

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \varphi(t),$$

$$P^2(x,t) = P_0^2 - A \cdot \left[q_0^2 \cdot x + q_0 \cdot (q_1 - q_0) \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot (q_1 - q_0)^2 \cdot x^3 \right], \quad (11)$$

откуда следует при подстановке $x = 1$:

$$P_0^2 - P_1^2 = \frac{A}{3} \cdot \left(q_0^2 + q_1^2 + q_0 \cdot q_1 \right). \quad (12)$$

Аппроксимация для среднего расхода может быть получена и из следующих соображений. В общем случае qcp можно представить алгебраической функцией от значений q_0 и q_1 на концах интервала. Её построение следует вести при условии сохранения размерности и чтобы в статике выполнялось соотношение $q_{cp} = q_0 = q_1$. Из сопоставления с выражениями (7), (8) и (12) можно представить:

$$q_{cp}^2 = q_0 \cdot q_1, \quad (13)$$

т.е. в виде среднего геометрического, которое будет меньше среднего арифметического. При этом имеют место следующие неравенства:

$$\sqrt{q_0 \cdot q_1} \le \frac{q_0 + q_1}{2};\ q_0 \cdot q_1 \le \frac{q_1^2 + q_0^2}{2};\ q_0 \cdot q_1 \le \frac{1}{3} \cdot \left(q_0^2 + q_1^2 + q_0 \cdot q_1 \right).$$

Можно строить, применяя указанный принцип, любые другие функциональные зависимости qcp от значений q_0 и q_1. Например:

$$q_{cp}^2 = \frac{2 \cdot q_0^2 + q_1^2}{q_0^2 + q_1^2}, \quad (14)$$

$$q_{cp}^2 = a_1 \cdot q_1^2 + a_2 \cdot q_0^2 + a_3 \cdot q_0 \cdot q_1$$

или

$$q_{cp} = \frac{a_1 \cdot q_1^3 + a_2 \cdot q_0^2 \cdot q_1 + a_3 \cdot q_1^2 \cdot q_0 + a_4 \cdot q_0^3}{q_1 \cdot q_0},$$

при этом $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Проверка качества приведённых приближённых моделей проводилась по данным численного решения Ю.И. Максимова [4] распределённой задачи с разрывным граничным условием.

Рассматривался газопровод с метаном:

- длина трубопровода L = 100 км;
- внутренний диаметр трубопровода D = 0,7 м;
- коэффициент гидравлического сопротивления λ = 0,01;
- универсальная газовая постоянная R = 8,314 Дж/(кг · °K);
- средняя температура газа T = 293 °K;
- коэффициент сжимаемости газа Z = 0,93.

Начальные и граничные условия:

P (0, 0) = 33,9 атм., P (1, 0) = 27,5 атм.; Q (x, 0) = 9,1 × 10^6 м^3/сут.;

Q (0, t) = 15,76 × 10^6 м^3/сут. = const;

P (1, t) = 7,5 атм. = const.

Расчёты выполнялись в безразмерном виде: A = B = 1,

$$\tau = \frac{t}{L} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot z \cdot g \cdot R \cdot T}{\lambda \cdot L}};\ q(x,\tau) = \frac{Q(x,\tau)}{Q(0,0)};\ P(x,\tau) = \frac{P(x,\tau)}{P(1,0)}.$$

Результаты решения [4] рассматривались как «точные», подставлялись в соотношения (7), (8), (10), (12), (13), (14). Отличия от 1,0 при делении левых частей на правые представляют собой ошибки

приближённых моделей. В таблице 1 приведены результаты таких расчётов функций $\left(P_0^2 - P_1^2\right)\cdot q_{cp}^{-2}$ для различных значений безразмерного времени τ (номера колонок соответствуют номерам приближённых формул для $q_{ср}$).

Таблица 1 – Результаты расчёта для функции $\left(P_0^2 - P_1^2\right)\cdot q_{cp}^{-2}$

τ	7	8	13	14	12	10 (ω = 16)	10 (ω = 12)
0,005	0,603	0,6463	0,696	0,8041	0,6312	1,2374	1,9057
0,025	0,700	0,7505	0,808	0,9341	0,7330	0,9574	1,0863
0,05	0,771	0,8251	0,887	1,0217	0,8065	0,9175	0,9794
0,10	0,850	0,8991	0,954	1,0399	0,8825	0,9634	1,0081
0,15	0,890	0,9286	0,969	1,0552	0,9157	0,9759	1,0079
0,2	0,915	0,9434	0,973	1,0541	0,9339	0,9784	1,0014
0,3	0,944	0,9598	0,975	1,0071	0,9547	0,9922	1,0092
0,4	0,962	0,9702	0,979	0,9961	0,9674	0,9957	1,0075
0,5	0,173	0,9775	0,982	0,9919	0,9759	0,9974	1,0059
0,6	0,980	0,9829	0,985	0,9911	0,9820	0,9985	1,0047
0,7	0,985	0,9869	0,988	0,9916	0,9869	0,9991	1,0037
0,8	0,989	0,9900	0,991	0,9927	0,9896	0,9982	1,0013
1,0	0,994	0,9941	0,994	0,9951	0,9939	0,9999	1,0021
1,2	0,997	0,9965	0,997	0,9969	0,9965	0,9997	1,0008
1,5	0,998	0,9984	0,998	0,9985	0,9984	0,9988	1,000
2,0	1,000	1,0000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Анализ показывает, что из всех рассмотренных «статических» моделей для qcp наилучшее приближение получилось в соотношениях (13) и (14); зависимость, полученная из решения И.Е. Ходановича (12), занимает среднее положение между соотношениями М.Г. Сухарева (7) и (8). «Динамические» модели (10) заметно лучше «статических» во всём основном интервале переходного процесса за исключением малых времён, где наблюдается узкий всплеск, характерный для замены распределённых параметров сосредоточенными. При этом следует иметь в виду, что модель (10) требовала расчёта производных, которые, как известно, определяются с ограниченной точностью; кроме того, как показал анализ, в расчётах Ю.И. Максимова есть некоторые погрешности, которые в первую очередь могут сказаться на значениях производных от анализируемых функций. По этим причинам вопрос о точности «динамической» модели при малых временах переходного процесса требует дальнейших исследований. Здесь, кстати, можно отметить, что значение параметра ω = 16 даёт лучший результат по сравнению с ω = 12, что подтверждают рекомендации [2].

2. Уравнение неразрывности

Если уравнение количества движения (1) учитывает равновесие сил в потоке и один из основных его параметров – коэффициент гидравлического сопротивления λ – определён эмпирическим путём с некоторой погрешностью, то уравнение неразрывности (2) является абсолютно строгим, и его аппроксимацию следует выполнить с большой тщательностью. Именно это уравнение по существу и отражает динамические свойства системы. Рассмотрим некоторые способы его усреднения.

Интегрирование выражения (2) по x от 0 до 1 даёт (при $t = 0$, $P_{ср} = P_{н}$):

$$\frac{dP_{cp}}{dt} = B\cdot\left(q_0 - q_1\right), \tag{15}$$

где $P_{cp} = \int_0^1 P\cdot dx$ – среднее давление.

Таким образом, всё сводится к удовлетворительному выражению среднего давления через значения на концах. Чтобы избежать ошибок, которые могут возникнуть при дифференцировании по времени в выражении (15) приближённого *P*, по-видимому, целесообразно перейти к интегральному уравнению:

$$P_{cp} = P_{н} + B\cdot\int_0^t\left[q_0(t') - q_1(t')\right]\cdot dt'. \tag{16}$$

Таким образом, следует сопоставить две формы уравнения неразрывности (15) и (16) при различных приближённых соотношениях для $P_{ср}$.

Рассмотрим некоторые возможности получения таких соотношений. Наиболее простая связь получается при использовании статических зависимостей:

$$P_{cp}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(P_0^2 + P_1^2\right); \tag{17}$$

$$P_{cp} = \frac{2}{3} \cdot \left(P_0 + \frac{P_1^2}{P_0 + P_1} \right). \tag{18}$$

Как указано в [1], эти зависимости приводят к заметным ошибкам при их использовании в выражении (15).

Следующая модель может быть получена, если использовать решение И.Е. Ходановича (11). Интегрирование по x от 0 до 1 даёт выражение для среднего давления:

$$P_{cp}^2 = P_0^2 - \frac{A}{6} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot q_0^2 + \frac{1}{2} \cdot q_1^2 + q_0 \cdot q_1 \right]. \tag{19}$$

Учитывая, что в статике $q_0 = q_1 = q$, тогда получим:

$$P_{cp}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(P_0^2 + P_1^2\right),$$

что соответствует решению выражения (17).

Учёт концевых поправок при приближённом интегрировании [2] даёт следующее выражение для среднего давления:

$$P_{cp} = \frac{P_0 + P_1}{2} + \frac{A}{2 \cdot \omega} \cdot \left(\frac{q_1^2}{P_1} - \frac{q_0^2}{P_0} \right). \tag{20}$$

Для статических условий имеем:

$$P_н = \frac{1}{2} \cdot \left(P_0 + P_1\right) + \frac{\left(P_0 - P_1\right) \cdot \left(P_0^2 - P_1^2\right)}{2 \cdot \omega \cdot P_0 \cdot P_1}, \tag{21}$$

что даёт результат, близкий к точному – первый член уравнения учитывает вклад основной линейной составляющей, а второй – поправку на нелинейность, вычисляемую по формуле Эйлера-Маклорена. Как показали исследования, точность формулы (21) достаточно высокая (доли процента) для реальных перепадов давления в газопроводах.

И, наконец, ещё одна модель для расчёта среднего давления может быть получена после следующих операций с уравнением (1). Интегрирование даёт:

$$P^2(x,t) - P_0^2 = A \cdot \int_0^x q^2 \cdot dx .$$

Как известно, $\int_0^1 \int_0^x q^2 \cdot dx^2 = \int_0^1 (1-x) \cdot q^2 \cdot dx = J$. Тогда после повторного интегрирования имеем:

$$P_{cp}^2 = P_0^2 = A \cdot \int_0^1 \int_0^x q^2 \cdot dx .$$

Вычислим J по формуле трапеций с концевыми поправками:

$$J = \frac{q_0^2}{2} + \frac{1}{\omega} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot (1-x) \cdot q^2 \Big|_{x=0} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot (1-x) \cdot q^2 \Big|_{x=1} \right].$$

Дифференцируя и заменяя из выражения (2):

$$\frac{\partial q^2}{\partial x} = -\frac{2}{B} \cdot q \cdot \frac{\partial P}{\partial t},$$

получим:

$$P_{cp}^2 = P_0^2 - A \cdot \left[\frac{q_0^2}{2} - \frac{1}{\omega} \cdot \left(q_0^2 - q_1^2 + \frac{2}{B} \cdot q_0 \cdot \frac{dP_0}{dt} \right) \right]. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае строго выполняется статическое соотношение для среднего давления.

По аналогии с уравнением движения для моделей уравнения неразрывности также проводились сопоставления на основании результатов расчётов Ю.А. Максимова [4]. В таблице 2 приведены данные для формулы (15), т.е. исследовалась дифференциальная форма уравнения при разных выражениях для $P_{ср}$ (номера колонок означают номера соответствующих формул для $P_{ср}$).

Таблица 2 – Результаты расчёта для функции $\frac{\partial P_{cp}}{\partial \tau} \cdot (q_0 - q_1)^{-1}$

τ	17	20	21	19
0,005	3,79	3,59	– 0,08	9,21
0,025	1,99	1,87	– 6,56	4,59
0,05	1,22	1,22	– 0,31	2,5
0,1	1,00	1,09	0,95	1,82
0,2	0,79	1,04	0,99	1,19
0,5	0,83	1,05	1,11	1,21
1,0	0,73	0,95	0,99	1,06

Из анализа полученных результатов следует, что уравнение неразрывности в дифференциальной форме (15) действительно оказывается чрезвычайно чувствительным к различным аппроксимациям, ошибки описания динамики (отличие от 1,0) очень велики для всех моделей. Сравнительно лучший результат можно отметить в модели (20), использующей предпосылки интегрирования с учётом концевых поправок, однако и здесь имеем большие отклонения при малых временах.

В таблице 3 приведены результаты аналогичного расчёта для интегральной формы уравнения неразрывности (16) (номера строк соответствуют номерам формул). Из сравнения с данными таблицы 2 следует, что интегральная форма уравнения неразрывности является значительно устойчивей дифференциальной (15) по отношению к неточностям приближённого моделирования газодинамических процессов – максимальная ошибка составляет ~ 8 %. Отсюда следует важный вывод о предпочтении интегральной модели (16) перед дифференциальной (15).

Таблица 3 – Результаты расчёта для интегральной формы уравнения неразрывности $P_{cp} = P_н + B \cdot \int_0^t [q_0(t') - q_1(t')] \cdot dt'$

τ	0,005	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	2,0
18	1,0278	1,0434	1,0483	1,0542	1,0417	1,0363	1,0007
17	1,0341	1,0511	1,0570	1,0643	1,0527	1,0481	1,0171
20	0,9801	0,9961	1,0011	1,0065	1,0043	1,0042	1,0048
21	1,0808	1,0509	0,9989	1,0087	1,0059	1,0027	1,0164
19	0,8815	1,0365	1,0649	1,0929	1,0911	1,0927	1,0164

Из таблицы 3 также следует, что в случае использования уравнения (16) для практических целей все рассмотренные приближённые модели дают сопоставимые результаты по точности описания динамических процессов. В статике, естественно, нужно отдать предпочтение соотношению (18), близкий результат также даёт формула (20). Если сравнивать модели между собой по описанию динамики процесса, то некоторое преимущество по точности имеется в модели (20). Наиболее грубой является модель (19).

Таким образом, проведённые исследования показали, что приближённое описание газодинамических процессов в газопроводах путём замены распределённых параметров сосредоточенными является эффективным средством, позволяющим зрительно упростить динамические модели и, следовательно, получить возможность разработки программ для ЭВМ, позволяющим вести оперативные расчёты нестационарных режимов газопроводов. При этом быстродействие программ повышается в 1000 раз по сравнению с программами, основанными на использовании численных решений распределённых уравнений.

Изложенные нами результаты могут служить основой для выбора приближённой системы сосредоточенных уравнений, исходя из практических требований по сложности моделей и необходимой точности получения результатов расчётов.

Список литературы:

1. Сухарев М.Г. Оптимизация систем транспорта газа / М.Г. Сухарев, Е.Р. Ставровский. – М. : Недра, 1975. – 277 с.
2. Трофимов А.С. Сосредоточенная нестационарная модель линейной части магистрального газопровода. – М. : ВНИИГАЗ, 1978 (депонирована во ВНИИЭгазпроме 14.11.1978 г. № 52-М).
3. Ходанович И.Е. Аналитические основы проектирования и эксплуатации магистральных газопроводов. – М. : Гостоптехиздат, 1961. – 128 с.
4. Минский Б.М. К методике решения задач нестационарного движения газа в трубах на быстродействующих вычислительных машинах / Б.М. Минский, Ю.И. Максимов, А.С. Малых // Труды ВНИИГАЗа «Транспорт природного газа». – М. : Гостоптехиздат, 1961. – Вып. 13 (21).
5. Трофимов А.С. Приближённая нелинейная модель нестационарного течения газа в трубе / А.С. Трофимов, Л.Б. Шершнева // Обзорная информация. Транспорт и подземное хранение газа. – 1979. – № 7. – С. 81–85.
6. Проектирование и управление газотранспортными системами с учётом стохастических условий работы оборудования / Р.А. Бабанский [и др.] // Проблемы развития автоматизации и механизации процессов добычи, переработки и транспорта газа и газового конденсата: Материалы научно-технической конференции (27–28 марта 2008 года, г. Краснодар). – Краснодар : ООО «Издательский Дом – Юг», 2008. – С. 93–101.
7. Аналитическое решение задачи нестационарного процесса транспорта газа / В.А. Куцев [и др.] // Гипотезы. Поиск. Прогнозы: сборник научных трудов. – Краснодар : ООО «Просвещение-Юг», 2000. – Вып. 9. – С. 278–284.
8. Передаточные функции аналитических решений задач транспорта газа / В.А Куцев [и др.] // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2003. – Т. 10. – № 4. – С. 181–182.
9. Стефанов Р.Е. Анализ состояния магистрального газопровода и моделирование системы «газопровод – массив грунта» // Технические и технологические системы: материалы XIII Международной научной конференции «ТТС-22» (22–24 ноября 2023 года, г. Краснодар). – Краснодар : ООО «Издательский Дом – Юг», 2023. – С. 315–323.
10. Стефанов Р.Е. Практическое значение глинистых грунтов для инженерно-геологической оценки и анализ процессов их набухания // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2023. – № 4. – С. 195–205.
11. Статистическая оценка отклонения параметров системы от номинальных значений / А.С. Трофимов [и др.] // Труды Кубанского государственного технологического университета. – 1999. – Т. 3. – № 1. – С. 54–67.
12. . Решение линеаризованных уравнений нестационарного процесса движения газа в трубопроводе / А.С. Трофимов [и др.] // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9. – № 2. – С. 470–472.
13. Трофимов А.С. Неизотермическая модель транспорта газа / А.С. Трофимов, В.А. Куцев, Кочарян Е.В. // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. – 2004. – № 2. – URL : https:// ogbus.ru/files/ogbus/authors/Trofimov/Trofimov_2.pdf
14. Трофимов А.С. Отклонения параметров линейной части газопроводов от номинальных значений / А.С. Трофимов, Р.А. Пахомов, Р.Ю. Крупник // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2005. – Т. 12. – № 4. – С. 1105–1106.

List of references:

1. Sukharev M.G. Optimization of gas transportation systems / M.G. Sukharev, E.R. Stavrovsky. – M. : Nedra, 1975. – 277 p.
2. Trofimov A.S. Concentrated non-stationary model of the linear part of the main gas pipeline. – M. : All-Russian research institute of the gas industry, 1978 (deposited in the All-Russian research institute for problems of economics of the gas industry on 14.11.1978, № 52-M).
3. Khodanovitch I.E. Analytical bases of design and operation of main gas pipelines. – M. : State scientific and technical publishing house of oil and mining-fuel literature, 1961. – 128 p.
4. Minsky B.M. On the methodology for solving problems of non-stationary gas flow in pipes on high-speed computers / B.M. Minsky, Yu.I. Maksimov, A.S. Malykh // Proceedings of All-Russian research institute of the gas industry «Transport of natural gas». – M. : State scientific and technical publishing house of oil and mining-fuel literature, 1961. – Iss. 13 (21).
5. Trofimov A.S. Approximate nonlinear model of non-stationary gas flow in a pipe / A.S. Trofimov, L.B. Shershneva // Review information. Transport and underground storage of gas. – 1979. – № 7. – P. 81–85.
6. Design and control of gas transportation systems taking into account stochastic operating conditions of equipment / R.A. Babansky [et al.] // Problems of development of automation and mechanization of

processes of extraction, processing and transportation of gas and gas condensate: materials of scientific and technical conference (March 27–28, 2008, Krasnodar). – Krasnodar : LLC «Publishing House – Yug», 2008. – P. 93–101.

7. Analytical solution of the problem of non-stationary gas transport process / V.A. Kutsev [et al.] // Hypotheses. Search. Forecasts: collection of scientific papers. – Krasnodar: LLC «Prosveshchenie-Yug», 2000. – Iss. 9. – P. 278–284.

8. Transfer functions of analytical solutions of gas transportation problems / V.A. Kutsev [et al.] // Review of applied and industrial mathematics. – 2003. – Vol. 10. – № 4. – P. 181–182.

9. Stefanov R.E. Analysis of the state of the main gas pipeline and modeling of the «gas pipeline – soil massif» system // Technical and technological systems: materials of the XIII International scientific conference «TTS-22» (November 22–24, 2023, Krasnodar). – Krasnodar : LLC «Publishing House – Yug», 2023. – P. 315–323.

10. Stefanov R.E. Practical significance of clayey soils for engineering-geological assessment and analysis of their swelling processes // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2023. – № 4. – P. 195–205.

11. Statistical assessment of deviation of system parameters from nominal values / A.S. Trofimov [et al.] // Works of the Kuban state technological university. – 1999. – Vol. 3. – № 1. – P. 54–67.

12. Solution of linearized equations of non-stationary process of gas motion in a pipeline / A.S. Trofimov [et al.] // Review of applied and industrial mathematics. – 2002. – Vol. 9. – № 2. – P. 470–472.

13. Trofimov A.S. Non-isothermal model of gas transport / A.S. Trofimov, V.A. Kutsev, E.V. Kocharyan // Electronic scientific journal Oil and Gas Business. – 2004. – № 2. – URL : https://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Trofimov/Trofimov_2.pdf

14. Trofimov A.S. Deviations of the parameters of the linear part of gas pipelines from the nominal values / A.S. Trofimov, R.A. Pakhomov, R.Yu. Krupnik // Review of applied and industrial mathematics. – 2005. – Vol. 12. – № 4. – P. 1105–1106.